Corso di Laurea in Matematica
Meccanica Celeste I modulo
Anno Accademico 1996-1997

Il sistema tolemaico

Calcolo delle longitudini dei pianeti secondo Tolomeo: modello per l'orbita del pianeta Mercurio

Studentessa: Raffaella Toncelli
Professoressa: Anna M. Nobili

Introduzione

L'astronomia è una scienza che, com'è noto, affonda le sue radici in tempi molto antichi: il cielo, il susseguirsi delle stagioni, il moto del Sole e il transito planetario sulla volta celeste furono oggetto di studio fin dall'antichità, parecchi secoli prima di Cristo. In questo certo è determinante la componente religiosa: il legame tra astronomia, astrologia e religione è evidente in tutte le civiltà del passato e, dato che agli eventi astronomici e ai fenomeni celesti è facile attribuire un carattere soprannaturale e interpretarli come manifestazioni del volere divino, proprio per indagarne i segreti, probabilmente, i sacerdoti e gli studiosi si dedicarono con grande passione a questa scienza, formulando teorie che, accanto a ragionamenti e deduzioni che niente hanno da invidiare al rigore scientifico moderno, utilizzavano spiegazioni favolose e bizzarre che si intrecciavano spesso con i miti e le leggende del luogo. Tuttavia l'aspetto teologico certo non basta a spiegare la grande cura e la precisione che mostrarono i nostri antenati nel catalogare le stelle e nel registrare il transito celeste: ragioni molto pratiche, come la necessità di avere calendari per la semina, di poter misurare il tempo, la possibilità di potersi orientare con la posizione delle stelle per facilitare la navigazione o i viaggi via terra, certo contribuirono a far crescere l'interesse non solo per l'osservazione astronomica ma anche per la realizzazione di un modello che fosse in grado di prevedere il moto dei corpi celesti.
Con queste esigenze si confrontarono molti scienziati e filosofi del passato e ancora oggi è sorprendente la quantità di informazioni e di dati che venivano raccolti pur senza grossi mezzi, senza cannocchiale e senza la moderna tecnologia. Già i greci avevano riconosciuto nel cielo cinque stelle che si comportavano diversamente rispetto a tutte le altre poiché cambiavano la propria posizione rispetto alle costellazioni (da qui il nome di "stelle erranti"), e ad esse si erano dedicati con particolare interesse: a Pitagora ($\sim$ 530 a.C.) si attribuisce l'idea di utilizzare un sistema di sfere in rotazione per spiegare il moto del Sole, della Luna e dei cinque pianeti visibili ad occhio nudo (Mercurio, Venere, Marte, Giove e Saturno); Eudosso ($\sim$ 370 a.C.) tentò di perfezionare questo sistema introducendo più sfere per ogni pianeta, con assi e velocità diverse.
Ma dovette apparire subito evidente che passare dalle osservazioni a una teoria che prevedesse correttamente e con un piccolo margine di errore il moto dei pianeti non era una facile impresa. Con Aristotele, circa nel 340 a.C., prende forma sempre di più la dottrina della gerarchia dei cieli e della perfezione della sfera; il modello matematico si trasforma pian piano in teoria metafisica, e se da una parte le caratteristiche divine degli astri celesti imponevano l'utilizzo di elementi fisici e geometrici perfetti, come i cerchi, le

sfere e le velocità uniformi, dall'altra le numerose osservazioni “smentivano” la perfezione dei moti celesti, rendendone difficile una modellizzazione matematica. Ad esempio, era evidente che i pianeti non solo si muovono verso est attraverso le costellazioni (moto normale) con una velocità diversa per ognuno e non uniforme, ma anche il moto normale è a tratti interrotto da un moto verso ovest, detto moto retrogrado, comune a tutti i pianeti osservabili ad eccezione del Sole e della Luna. Non solo: durante questi moti retrogradi si era osservata una variazione di luminosità dei pianeti con una periodicità regolare che era possibile interpretare come una corrispondente variazione della distanza del pianeta dalla Terra. Un altro grosso problema, infine, era costituito dalla variazione della velocità dei corpi celesti, che difficilmente si accordava con una teoria che disponeva soltanto di moti circolari uniformi: eppure, le osservazioni fatte sul moto del Sole avevano rivelato che in estate il moto di questa stella è meno rapido che in inverno, dato che per spostarsi dall'equinozio primaverile a quello autunnale, cioè per compiere un arco di 180° lungo l'eclittica, il Sole impiega quasi 6 giorni in più che per tornare dall'equinozio autunnale a quello primaverile, anche se l'arco descritto è ancora di 180°.
I modelli che furono proposti e i metodi con cui si tentò di risolvere questi problemi furono diversi nel corso dei secoli. Accanto ai tentativi di Pitagora, Eudosso e Aristotele, vale la pena ricordare anche Eraclito e Aristarco di Samo ($\sim$ 240 a.C.) che per primi proposero, senza successo, un modello eliocentrico. Ma i più importanti contributi all'astronomia si ebbero senz'altro dalla scuola di Alessandria, fondata attorno al 300 a.C.: Apollonio preparò una teoria fondata sulla combinazione di epicicli e deferenti, Ipparco stilò il primo catalogo di stelle, introdusse l'uso sistematico della trigonometria sferica e a lui si attribuisce anche la scoperta della precessione. Tuttavia, essi riuscirono a dar vita a un modello che funzionava bene per le orbite del sole e della Luna ma non riuscirono a darne uno esauriente per gli altri pianeti.
In questa impresa riuscì invece Tolomeo di Alessandria qualche secolo dopo (II sec. d.C.), il quale nella sua opera, a noi giunta con il titolo Almagesto (in arabo "la più grande"), costruisce un modello geocentrico in cui la Terra è vista come una sfera posta nel centro del cielo, puntiforme rispetto ad esso e priva di un moto traslatorio o rotatorio, e le orbite dei pianeti sulla volta celeste vengono tutte descritte con la combinazione opportuna di cerchi, epicicli, e velocità angolari costanti. In realtà il modello tolemaico presentava alcune incongruenze con la realtà delle osservazioni, come mostra il fatto che, per accordare i dati sperimentali del moto lunare con la teoria, Tolomeo era stato costretto a introdurre un epiciclo di raggio molto grande, cosa che avrebbe comportato una variazione considerevole della distanza Terra-Luna con conseguente variazione di grandezza del disco lunare, mentre niente di

questo era confermato dalle osservazioni. Ma, come lui stesso sottolinea nella sua opera, Tolomeo non era interessato ad indagare il vero sistema fisico del mondo ma si proponeva soltanto di dare un modello matematico attraverso il quale prevedere il moto dei pianeti. E in questo la sua teoria fu tanto valida da rimanere come riferimento per molti secoli dopo di lui.

Epicicli e deferenti

Il modello che Tolomeo propose nella sua opera in tredici volumi per descrivere le orbite del Sole, della Luna e dei cinque pianeti visibili ad occhio nudo è in realtà molto complesso e ogni singolo pianeta meriterebbe una trattazione molto approfondita che va ben oltre lo scopo di questo lavoro. Ma la forza della teoria tolemaica consiste nel fatto che, per quanto complesso possa risultare il modello finale, esso si basa sulla combinazione di elementi molto semplici, che è possibile comprendere descrivendo la traiettoria di un punto che si muove uniformemente su un cerchio, sia esso con origine fissa o anch'essa a sua volta in movimento su un'altra circonferenza. Si osservi, ad esempio la figura 1: sia O l'origine di un sistema di riferimento fisso e si consideri un cerchio ($deferente$) centrato in O e avente raggio r_1. Sul deferente si consideri ancora un punto O' che si muove su di esso di moto circolare uniforme con velocità angolare ω_1. In O' è centrato un secondo cerchio (*epiciclo*) di raggio r_2, che si muove rigidamente solidale ad O'. Sull'epiciclo andiamo ad esaminare il movimento di un punto P, anche questo in moto circolare uniforme ma con una velocità angolare ω_2.

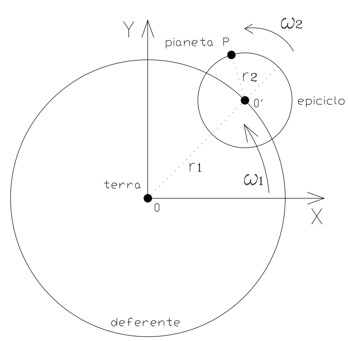

Figura 1: Sistema epiciclo-deferente semplice

Questo è il modello più semplice che si può fare di un sistema epiciclo-deferente e, utilizzando soltanto relazioni trigonometriche, è possibile descrivere la curva che ha per sostegno la traiettoria descritta dal punto P. Eppure, se si fanno variare le distanze r_1 e r_2 e le velocità angolari ω_1 e ω_2, si può notare che si ottengono curve diverse, ciascuna con particolari caratteristiche. Lo scopo di questo lavoro è dunque quello di riprodurre, mediante una simulazione al computer, alcuni esempi significativi ottenuti con un sistema epiciclo-deferente semplice, per poi ricostruire un sistema più complesso che approssimi, anche se grossolanamente, il transito di Mercurio sulla volta celeste così come potrebbe essere osservato da un osservatore posto sull'equatore terrestre.

Esempio 1: traiettorie chiuse e traiettorie aperte

La prima banale osservazione che si può fare circa le velocità angolari è che la curva considerata sarà chiusa se le velocità saranno "in risonanza". A titolo di esempio è stato considerato prima il caso (a) in cui $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 3$, e poi il caso (b) in cui le velocità non sono in risonanza anche se per un piccolo fattore, cioè $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 3.2\,\omega_1$. Le figure realizzate (utilizzando Matlab) facendo un grafico delle due funzioni mostrano come le curve cambino sostanzialmente e come la seconda curva possa apparire, a prima vista, molto più complicata della prima.

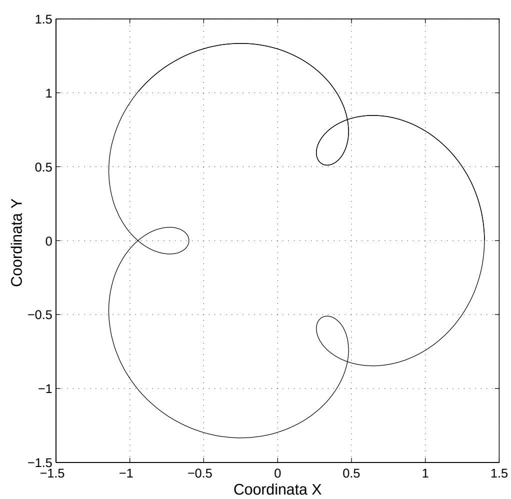

Figura 2: Esempio 1(a): traiettoria chiusa ($\omega_2 = 3\,\omega_1$)

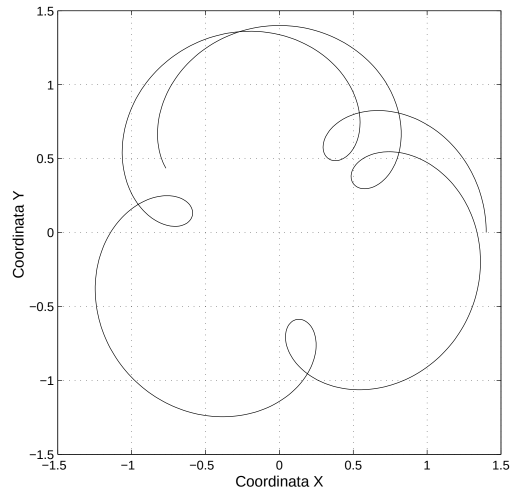

Figura 3: Esempio 1(b): traiettoria aperta ($\omega_2 = 3.2\,\omega_1$)

Esempio 2: cerchio non centrato nell'origine

Si prenda in questo esempio $r_2 \ll r_1$ (in particolare è stato preso $r_2 = 3/50\,r_1$) e $\omega_2 = -\omega_1$ (dove il segno meno indica che il punto sull'epiciclo compie una rotazione verso ovest mentre quello sul deferente si muove verso est), la figura che ne deriva è un cerchio non centrato nell'origine.

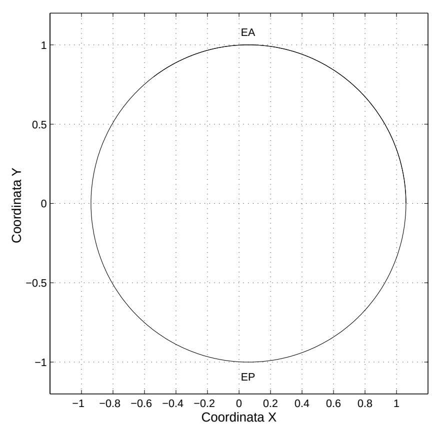

Figura 4: Moto del Sole durante l'anno rispetto alla Terra (posta nell'origine delle coordinate): cerchio non centrato nell'origine.

Tolomeo sfruttò questo modello nello studio delle "anomalie" del Sole, riuscendo così a spiegare il problema della non equidistanza temporale tra gli equinozi. Infatti, non potendo variare la velocità angolare del Sole, era necessario che variasse la distanza da percorrere, ma se indichiamo gli equinozi con EP (equinozio di primavera) e EA (equinozio d'autunno) come in figura, si vede facilmente che il tratto di curva tra EP ed EA è maggiore di quello tra EA ed EP, e questo, con opportuni valori, spiegava la differenza di 6 giorni che si registrava dalle osservazioni.

Il fatto che la figura sia proprio un cerchio non centrato nell'origine dovette suggerire l'introduzione di un nuovo strumento, l'eccentrico, costituito da un cerchio centrato in un punto diverso dall'origine. Se la distanza tra l'origine e il centro del cerchio è proprio il raggio dell'epiciclo minore considerato prima, utilizzare solo un eccentrico è del tutto equivalente al sistema epiciclo-deferente appena descritto, con il vantaggio di una notevole semplificazione del modello. Del resto, a proposito della variazione della velocità angolare, problema che tanto impegnò gli astronomi antichi, venne proposta anche una soluzione diversa: l'*equante* (figura 5). Questo metodo consisteva nel considerare come curva descritta dal corpo celeste ancora un cerchio centrato nell'origine, ma considerare la velocità angolare ω_1 uniforme non rispetto all'origine O ma rispetto ad un punto K. Questa volta ritroviamo la misura del raggio dell'epiciclo nella misura della distanza OK e questo ci fa capire quanto strettamente fossero legati i tre modelli.

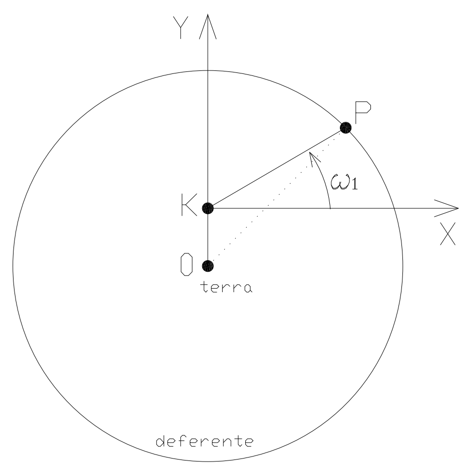

Figura 5: L'equante: la velocità angolare del corpo celeste è ancora uniforme ma viene misurata a partire dal punto K, non coincidente con l'origine O.

Esempio 3: l'ellisse

Consideriamo adesso ancora un caso particolare di epiciclo minore. Se prendiamo $r_2 \ll r_1$ (in particolare ancora $r_2 = 3/50\, r_1$) e $\omega_2 = -2\omega_1$, la figura che si ottiene è un'ellisse di poco schiacciata rispetto al cerchio. Si è voluto mostrare questo caso perché è interessante sottolineare come l'ellisse, che come sappiamo avrà un ruolo fondamentale per descrivere le orbite dei pianeti, sia esprimibile soltanto con la combinazione di epicicli e deferenti opportuni.

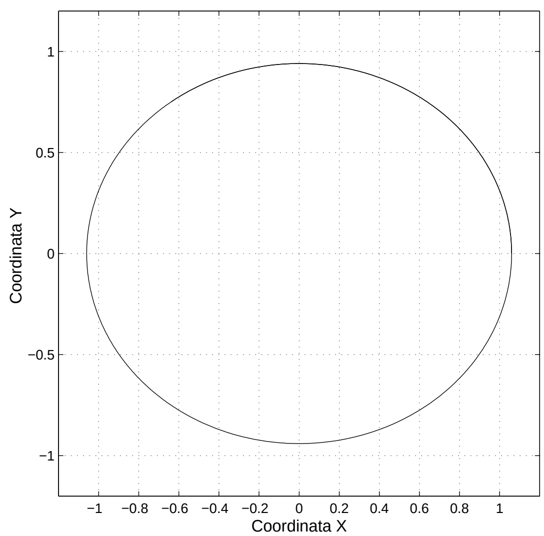

Figura 6: Traiettoria ellittica ottenuta con una opportuna combinazione dei valori dei raggi e delle velocità angolari degli epicicli e dei deferenti.

Esempio 4: una combinazione generica

Già nell'esempio 1 si è visto come sia possibile realizzare con un modello epiciclo-deferente semplice curve che, per un osservatore sulla Terra, possano apparire piuttosto complicate. Come mostra la figura 3, infatti, la curva descritta con $r_1 = 1$, $r_2 = 0.4\, r_1$, $\omega_1 = 1$ e $\omega_2 = 3.2\, \omega_1$ presenta dei "cappi", ovvero delle regioni in cui il punto materiale P, per un osservatore in O che ripeta le sue osservazioni ogni sera alla stessa ora, compie un moto retrogrado, sembra cioè tornare indietro rispetto alla sua direzione originale, fermarsi e poi ripartire. Con questo modello si riesce dunque a spiegare la retrocessione dei pianeti e, oltre a questo, a dare una spiegazione alla variazione di luminosità. Infatti, era stato notato che durante le retrocessioni i pianeti apparivano più luminosi (soprattutto Marte) e questo aveva fatto pensare proprio ad una diminuzione della distanza Terra-pianeta: ma questo, come si vede dalla figura 3, si accorda perfettamente con il modello roposto, poiché il pianeta risulta essere più vicino alla terra quando si trova nel punto di mezzo del periodo di retrocessione. Tuttavia, il sistema analizzato nell'esempio 1(b) è ancora molto semplice per poter spiegare lo strano movimento dei pianeti nel cielo: in questo terzo caso si è voluto dare un esempio di come sia possibile complicare il modello iniziale quanto si vuole, aggiungendo nuovi epicicli minori con i propri raggi e velocità angolari. Il sistema scelto, rappresentato in figura 7, è formato da un deferente di raggio r_1 che si muove con velocità amgolare ω_1, un epiciclo maggiore di raggio r_2 e velocità angolare ω_2 e un terzo epiciclo minore di raggio r_3 la cui origine si muove con velocià angolare negativa ω_3 sull'epiciclo maggiore.

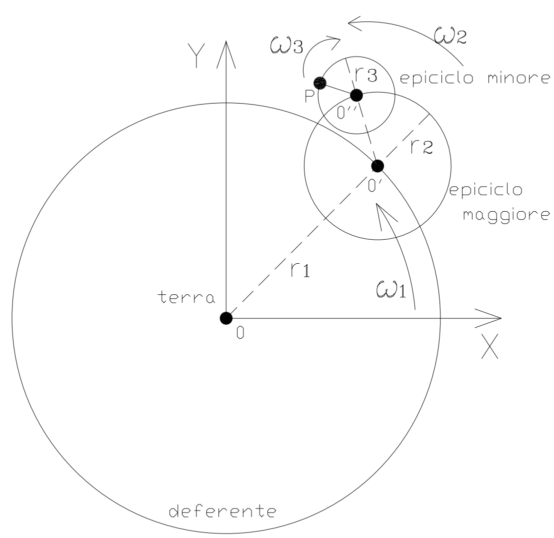

Figura 7: Schema del modello formato da un deferente, un epiciclo maggiore e un epiciclo minore.

Dopo aver trovato, sempre per via trigonometrica, la funzione che descrive il moto del punto P, è stato riportato nel grafico (figura 8), a titolo di esempio, il sostegno di tale curva.

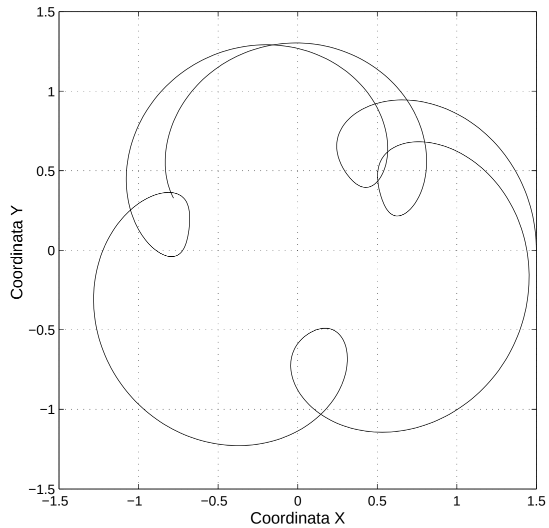

Figura 8: Sistema ottenuto combinando un deferente, un epiciclo maggiore e un epiciclo minore.

Un esempio pratico: l'orbita di Mercurio

Nelle pagine precedenti è stato illustrato il funzionamento e il possibile utilizzo del modello matematico degli epicicli e deferenti; adesso si è voluto analizzare più in dettaglio come queste teorie matematiche possano essere adattate alla realtà. Nel far questo è stato preso come esempio proprio una delle cinque "stelle erranti" di Tolomeo: il pianeta Mercurio. Mercurio è il pianeta più vicino al Sole ($a = 0.387\,UA$), ha un'orbita molto eccentrica ($e = 0.206$) e un periodo siderale di circa 88 giorni. Il suo raggio equatoriale è piuttosto piccolo, circa 4878 Km e la dimensione apparente del suo disco varia notevolmente durante il moto nel cielo, passando da 4".8 in corrispondenza della massima distanza dalla Terra, a 13".3 in corrispondenza di quella minima. La variazione della distanza Terra-Mercurio, così accentuata a causa dell'orbita molto ellittica, ha come conseguenza anche una variazione di luminosità, che passa da $-1^m.2$ a $2^m.2$. Il periodo di rotazione, invece, è più difficile da determinare ed è stato oggetto di studi approfonditi nel corso del tempo. Anche se inizialmente si pensava che il pianeta coruotasse a causa della forza mareale esercitata dal Sole, in seguito il suo periodo di rotazione è stato fissato a 59 giorni, ovvero 2/3 del periodo di rivoluzione attorno al Sole. Infine, l'inclinazione sull'eclittica dell'orbita è di circa 7 gradi.

Gli elementi orbitali appena visti ci danno tutte le informazioni necessarie per tracciare l'orbita di Mercurio attorno al Sole in un sistema di riferimento inerziale, cioè secondo un punto di vista eliocentrico. Ma se vogliamo considerare l'orbita di questo pianeta così come appare se osservato dalla Terra allora dobbiamo considerare la composizione di due moti: il moto di Mercurio attorno al Sole e quello della Terra attorno al Sole. Appare dunque chiaro il ruolo degli epicicli e dei deferenti: il deferente, infatti, ha il compito di rappresentare il moto della Terra attorno al Sole, mentre l'epiciclo rappresenta il moto del pianeta attorno al Sole.

In prima approssimazione, allora, è possibile descrivere l'orbita di Mercurio con un modello semplice epiciclo-deferente in cui un cui un epiciclo di raggio r_1 (pari al semiasse maggiore dell'orbita di Mercurio) si muove con velocità angolare $2\pi/365$ (anomalia media del Sole) sul deferente, e il pianeta P gira con velocità angolare $2\pi/0.241yr$ (dove $0.241yr$ è il periodo siderale di Mercurio) sull'epiciclo.

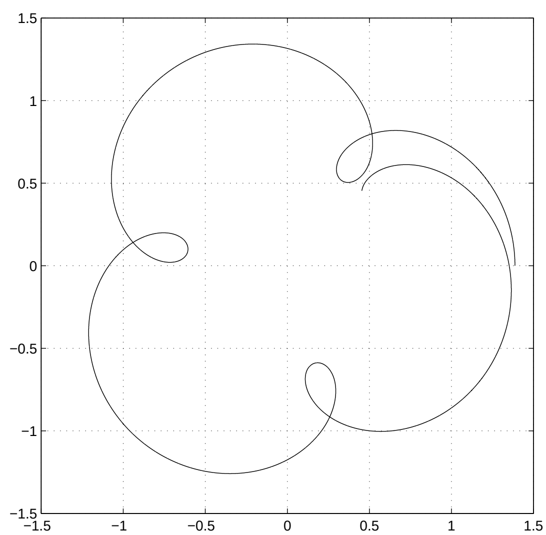

Figura 9: Traiettoria del pianeta Mercurio ottenuta utilizzando un modello semplificato costituito da un solo deferente e un epiciclo.

Questo semplice modello certo non è sufficiente a predire con una buona approssimazione la posizione di Mercurio sulla volta celeste, poiché l'aver scelto questa combinazione di velocità angolari corrisponde all'aver approssimato a un cerchio di raggio ($a = 0.387\,UA$) l'ellisse che descrive l'orbita di Mercurio in un sistema eliocentrico. Tuttavia, esso già basta a mettere in evidenza alcuni tratti caratteristici del moto del pianeta: osservando i dati relativi a questo modello (si veda in appendice il programma fortran "Primo modello") si può notare infatti che l'elongazione del pianeta, cioè la differenza tra le longitudini del pianeta e del Sole, non assume tutti i valori tra 0 e 360 ma rimane sempre compresa tra -28 e 28 gradi, come si riscontra nelle osservazioni. Questa è infatti una caratteristica dei pianeti inferiori (Mercurio e Venere) e nel sistema tolemaico si ritrova nel fatto che l'origine dell'epiciclo si muove sul deferente con velocità angolare uguale all'anomalia media del Sole. Volendo calcolare le orbite di un pianeta superiore con il sistema tolemaico, bisogna invece sostituire questa velocità angolare con $2\pi/T_{sinodico}$. Infine, non deve stupire il fatto che i valori delle velocità angolari fossero bn noti: da un punto di vista pratico quello che riusciamo a registrare esattamente con le osservazioni non è tanto la velocità angolare ma il periodo, e, potendo disporre di molti dati osservativi, l'errore relativo alla durata dei periodi commesso dagli antichi greci era meno di 1/10000.

Il sistema appena visto non è altro che un caso particolare di quanto già discusso nell'esempio 1(b), ma per dare un modello un poco più esauriente del moto di Mercurio in realtà è necessario utilizzare tutte le accortezze geometriche viste nella prima parte, cioè un'eccentrico mobile, un epiciclo e un punto d'equante. Nel sistema che segue (figure 10-11) si è cercato di ricostruire il modello proposto da Tolomeo nell'Almagesto per il pianeta Mercurio, facendo riferimento a quanto riportato da Paul Tannery ([4]).

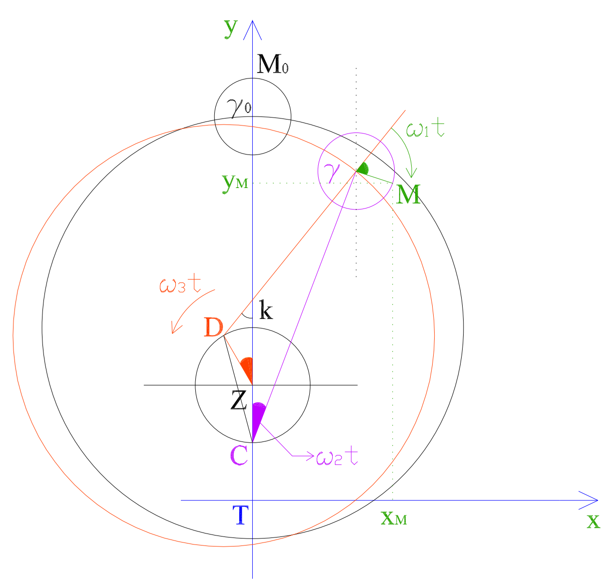

Figura 10: Schema del sistema tolemaico per il pianeta Mercurio

In questo sistema il pianeta si muove uniformemente ($\omega_1 = costante$) su un epiciclo che percorre in un tempo pari alla durata della rivoluzione sinodica. Il cerchio deferente, però, che il centro γ dell'epiciclo percorre in un anno da occidente ad oriente, non è più un eccentrico fisso ma è mobile ed è tale che il centro Δ del deferente percorra esattamente in un anno, con un moto uniforme ($\omega_3 = costante$), un altro cerchio di centro Z. Il raggio del cerchio è 1/24 del raggio del deferente preso come unità, e il senso di rotazione del punto Δ avviene nel senso opposto ai due movimenti precedenti. Mentre il movimento del pianeta M sull'epiciclo e di Δ sul cerchio sono uniformi, il movimento di γ sul cerchio non è uniforme rispetto al suo centro Δ, ma è uniforme ($\omega_2 = costante$) rispetto al punto C (equante) che si trova a una distanza di 1/20 dal centro della terra, indicata nella figura con T. La linea $C\gamma$ ruoterà da occidente ad oriente con velocità angolare uniforme in modo tale da compiere una rivoluzione completa in un anno.

Di seguito (figura 11) è stata graficata la funzione che ha per sostegno la curva che descrive questo modello. In appendice è stato riportato anche il listato di un programma numerico che fornisce una tabella nella quale è visualizzata la longitudine del Sole e la longitudine e l'elongazione di Mercurio calcolate, sempre secondo questo modello, ogni 10 giorni. Infine, bisogna notare che nella sua trattazione per ricavare le longitudini, Tolomeo non tenne probabilmente conto dell'inclinazione dell'orbita del pianeta sull'eclittica, da lui giudicata piccola, e questo è ciò che si è assunto anche in questo lavoro. Tuttavia, in alcuni suoi scritti per il pianeta Mercurio si parla di un'inclinazione dell'epiciclo sull'eccentrico pari a $6°30'$ e di una inclinazione dell'eccentrico sull'eclittica pari a 0°10". Di queste inclinazioni dovette invece tener conto nel calcolo delle latitudini.

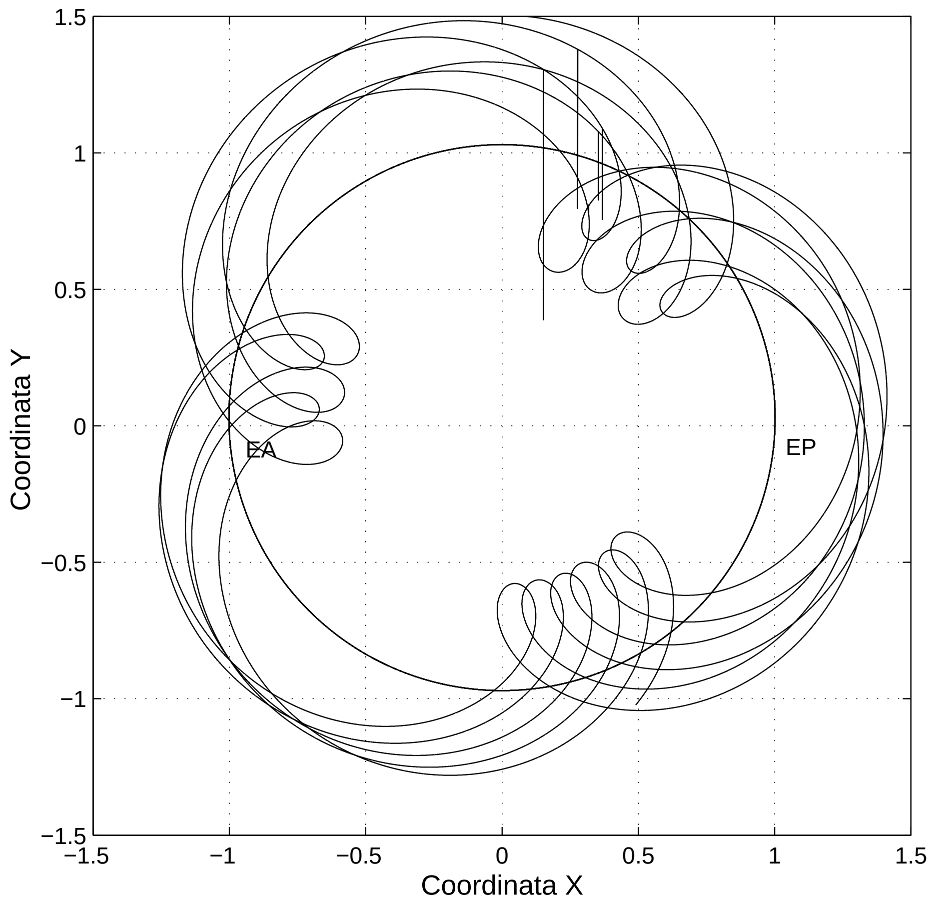

Figura 11: Traiettoria del pianeta Mercurio secondo il modello proposto nell'Almagesto. In figura è stato riportato anche il moto apparente del Sole (cerchio non centrato nell'origine). Le scritte EA e EP si riferiscono alla posizione del Sole nel giorno dell'Equinozio di Primavera e in quello di Autunno.

Bibliografia

[1] John L.E. Dreyer, *Storia dell'astonomia da Talete a Keplero*, ed Feltrinelli (1970).

[2] Pierre Duhem, *Le systeme du monde: histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, **Voll. 1-2**, ed Hermann (1954).

[3] Thomas S. Kuhn, *La rivoluzione copernicana*, ed Einaudi (1959).

[4] Paul Tannery, *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne*, ed Arno Press (1976).