

Capitolo 1

Il principio di equivalenza e la sua verifica

1.1 Il principio di equivalenza

1.1.1 Definizione e cenni storici

Il principio di equivalenza è un principio di fondamentale importanza per la fisica moderna, poiché sta alla base delle teorie metriche della gravitazione e in particolare della Teoria della Relatività Generale formulata da Einstein, ancora oggi la migliore teoria della gravitazione.

Il fatto che la forza di gravità presentasse caratteristiche diverse da tutte le altre era già noto anche a Galileo che, nel 1638, aveva osservato che “*se si levasse totalmente la resistenza del mezzo, tutte le materie discenderebbero con eguali velocità*” [Ga, pag 128-129], cioè che due corpi, lasciati liberi nel campo gravitazionale della Terra, acquistano la medesima accelerazione indipendentemente dalla loro massa. Galileo aveva verificato questa equivalenza attraverso alcuni esperimenti tesi a confrontare il moto lungo un piano inclinato oppure il moto di pendoli di diverso materiale, intuendo che l'indipendenza dell'accelerazione gravitazionale dalla massa non riguarda soltanto i corpi in caduta libera nel campo gravitazionale, come i corpi che cadono da una torre, ma tutti i fenomeni che coinvolgono la gravità, anche se sono presenti altre forze quali ad esempio le reazioni vincolari.

Più tardi, circa nel 1680, Newton formalizzò questo concetto in termini di forze e di masse.

Nelle prime pagine del suo trattato “*Philosophiae naturalis principia mathematica*” [Nw] si legge:

“This quantity that I mean hereafter under the name of...mass...is known by the weight...for it is proportional to the weight as I have found by experiments on pendulums, very accurately made...”.

Vale la pena prestare per un momento attenzione al concetto di massa: se sottoponiamo un corpo ad una certa forza si verifica che esso acquista un'accelerazione direttamente proporzionale alla forza stessa. Definiamo questo fattore di proporzionalità come la *massa inerziale* del corpo preso in esame. Dunque, possiamo scrivere:

$$\vec{F} = m_i \vec{a} \quad (1.1.1)$$

Ora, se si considera la forza gravitazionale, si trova che anch'essa è proporzionale alle masse dei corpi che coinvolge: si parla allora di *massa gravitazionale*, attiva o passiva a seconda che un corpo sia considerato come quello che attrae o che viene attratto dall'altro. In formula si ha:

$$\vec{F}_g = \frac{GM_g^a m_g^p}{R^2} \hat{R} \quad (1.1.2)$$

dove con \vec{F}_g viene indicata la forza gravitazionale, G è la costante di gravitazione universale, \hat{R} è il versore che unisce i due corpi considerati e M_g^a e m_g^p sono le loro rispettive masse gravitazionali, attive e passive¹.

Con un procedimento proposto da Mach [Mc], è possibile definire la massa inerziale e gravitazionale in maniera più rigorosa, riferendola a campioni standard. Infatti, si consideri un corpo e lo si faccia interagire con la massa campione di 1 kg. Se si indica con

a = modulo dell'accelerazione del corpo

a_s = modulo dell'accelerazione del campione standard

si può definire:

$$m_i = 1 \text{ kg} \cdot \frac{a_s}{a} \quad (1.1.3)$$

Allo stesso modo si definisce la massa gravitazionale prendendo un corpo con una massa gravitazionale campione (ancora il kg campione per convenienza) e facendolo interagire con un altro corpo posto a una distanza r . Dunque poniamo:

$$m_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{a m_i r^2}{1 \text{ kg } G} \right) \quad (1.1.4)$$

¹ Per il terzo principio della dinamica, quello di azione e reazione, sappiamo inoltre di poter "scambiare" i ruoli di chi attrae e di chi viene attratto. Ecco perché in generale si può parlare soltanto di massa gravitazionale, assumendo $m_g^a = m_g^p$.

e, dalla equazione (1.1.3), la (1.1.4) diventa:

$$m_g = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{a_s r^2}{G} \right) \quad (1.1.5)$$

Il passaggio al limite $r \rightarrow \infty$ è necessario per eliminare gli effetti dei campi di multipolo che dipendono dalla distribuzione di massa dei corpi. Inoltre, in questo modo si eliminano anche tutte le possibili forze (forze nucleari, di Van der Waals...) che si potrebbero avere mantenendo le masse vicine: a grande distanza l'unica forza presente è la forza gravitazionale².

Dunque, confrontando l'equazione (1.1.1) con la (1.1.2), otteniamo che il principio secondo il quale tutti i corpi soggetti alla forza di gravità acquistano la stessa accelerazione può essere riformulato in maniera equivalente dicendo che la massa inerziale e la massa gravitazionale sono uguali per ciascun corpo, o meglio che il rapporto fra le due masse è sempre lo stesso, indipendentemente dal materiale e dalla composizione del corpo in esame.

Newton si spinse ancora più avanti, mettendo in luce un altro aspetto importante che deriva da questa proprietà, cioè il legame tra la forza apparente (ad esempio quella centrifuga) e la forza di gravità in un riferimento non inerziale. Infatti, anche la forza apparente, forza che si ha soltanto nei riferimenti non inerziali, è una forza che dipende dalla massa (inerziale). Se dunque si considera un corpo soggetto alla gravità e che cade con accelerazione \vec{g} , nel riferimento del corpo stesso esso sarà soggetto anche alla forza apparente che, se vale l'uguaglianza tra le masse gravitazionale e inerziale, sarà di modulo uguale alla forza di gravità ma di senso opposto. Newton, anzi, sfruttò proprio questa ipotesi per concludere che la forza di gravità è proporzionale alla massa del corpo attratto: infatti, osservando i satelliti di Giove, si era accorto che, mettendosi in un sistema di riferimento solidale con Giove (e quindi in rotazione attorno al Sole), si poteva calcolare la loro orbita come se l'unica forza agente fosse quella gravitazionale del pianeta. Ma i satelliti sono attratti, oltre che da Giove, anche dal Sole: Newton ne concluse che la forza di gravità del Sole doveva essere proporzionale alla massa del corpo attratto, perché solo in questo caso, nel riferimento in rotazione con Giove, la forza centrifuga, dovuta alla rotazione del pianeta e del suo sistema attorno al Sole, si sarebbe cancellata con la forza gravitazionale esercitata dalla stella, in accordo con le osservazioni astronomiche.

² Ci potrebbe essere anche la forza elettrostatica: l'accorgimento per eliminarla è quello di mantenere neutra la massa campione.

Newton e Galileo avevano dunque formulato in tre modi diversi ma equivalenti uno stesso concetto fisico:

- (a) tutti i gravi cadono con la stessa accelerazione;
- (b) il rapporto tra la massa gravitazionale e massa inerziale rimane costante ed uguale per tutti i corpi;
- (c) in un riferimento in caduta libera la forza di gravità viene cancellata dalla forza apparente.

Capovolgendo il punto di vista dei suoi predecessori, Einstein sostenne che la misteriosa proporzionalità tra massa gravitazionale e inerziale e l'esatta cancellazione delle forze gravitazionali e centrifuga in un sistema di riferimento in caduta libera non erano solo una fortuita coincidenza, una particolare caratteristica confermata dalle osservazioni, ma esprimevano la natura fondamentale della gravitazione.

Egli riassunse la situazione con un celebre "esperimento ideale", noto come "l'ascensore di Einstein".

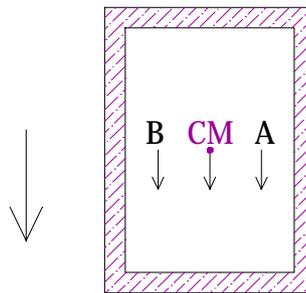


figura 1.1.1: Rappresentazione schematica dell'esperimento dell'ascensore

In tale esperimento si considera un ascensore che, a causa della rottura delle corde di sostegno e in mancanza di freni e attriti di qualsiasi genere, si trova in caduta libera verticale, nel campo di attrazione gravitazionale della Terra. Questo ascensore non è un riferimento inerziale, dal momento che è soggetto a una accelerazione \vec{g} rivolta verso il basso. Quindi, su una pallina che si trovi all'interno dell'ascensore, oltre alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ agisce anche la forza apparente $\vec{F} = -m\vec{a}$, dove \vec{a} è l'accelerazione del riferimento. Essendo $\vec{a} = \vec{g}$, ne segue che le due forze sono uguali e opposte e la loro risultante è nulla, proprio come afferma la proposizione (c): in un ascensore in caduta libera, gli oggetti al suo interno sono *senza peso*, nel senso che, se si va a misurare con un dinamometro la forza applicata a un qualsiasi oggetto, si trova zero. Questo è l'enunciato di quello che in letteratura prende il nome di *Principio di Equivalenza Debole*.

1.1.2 Il principio di equivalenza forte (o di Einstein)

Per Einstein, tuttavia, l'equivalenza tra i due riferimenti non si limita alle sole leggi della gravitazione. Egli enuncia un Principio di Equivalenza più generale, che prende il nome di *Principio di Equivalenza Forte*:

“In un laboratorio non ruotante, che sia schermato da forze elettromagnetiche e che si trovi in caduta libera, le leggi della fisica e il loro contenuto numerico sono indipendenti dalla posizione del laboratorio. In tale laboratorio, inoltre, tutte le particelle, che siano abbastanza piccole da poter trascurare su di loro le forze mareali e libere da forze non gravitazionali, si muovono senza accelerazioni.”

L'importanza di questo principio per la teoria della gravitazione è dunque enorme: come si trova alla base della meccanica classica il principio di relatività, che affermava che due sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro sono fisicamente equivalenti, alla base della teoria della gravitazione si trova il Principio di Equivalenza, che applica l'equivalenza dei riferimenti ad un sistema in caduta libera (e con questa espressione si intende un riferimento soggetto solo alla forza gravitazionale) confrontato con un riferimento inerziale.

La forza di gravità è l'unica ad avere questa proprietà e per cui valga tale equivalenza, perciò merita di essere studiata e analizzata singolarmente. Infatti, da quanto abbiamo appena visto segue che ci si può dimenticare della

forza gravitazionale a patto di mettersi in particolari sistemi di riferimento, o, trasferendo le proprietà di questa forza alla geometria dello spazio, addirittura ci si può dimenticare della forza di gravità a patto di considerare uno spazio con particolari caratteristiche geometriche. Questo è il concetto su cui si fondano tutte le teorie metriche della relatività, presupposto importante dal quale partire per una comprensione della relatività generale. Per usare le parole di Einstein [Ein]:

“la possibilità di spiegare l’uguaglianza numerica dell’inerzia e della gravitazione verificando la loro natura dà, secondo me, alla teoria generale della relatività una tale superiorità sulle concezioni della meccanica classica da far considerare, al paragone, piccole tutte le difficoltà incontrate nello sviluppo.”

Tuttavia, un aspetto su cui vale la pena soffermarsi è l’aspetto locale di questo principio. Se si considera una navicella spaziale che ruota attorno alla Terra, e che quindi sia in un riferimento in caduta libera, e si calcola la forza di gravità cui sono soggetti due punti massa distinti all’interno della navicella, ci si accorge immediatamente che essa non ha lo stesso modulo per entrambe. Infatti, se il centro di massa della navicella si trova a una distanza R dal centro della Terra, la prima pallina si troverà a una distanza che indicheremo con $R - h$, mentre la seconda ad una distanza $R + h$. Di conseguenza, mentre la navicella cade con una certa accelerazione, avremo che il primo punto massa cade con un’accelerazione leggermente più grande, mentre il secondo con una leggermente più piccola. Un osservatore che si trovi all’interno della navicella, allora, dopo un certo tempo, vedrà che la prima massa si è spostata verso il basso mentre la seconda sarà salita. A causa degli effetti del gradiente della forza di gravità (cioè del fatto che questa forza non è uniforme nel laboratorio ma varia a seconda del punto che considero), lasciate libere due masse esse non rimangono ferme all’interno della navicella, ma anzi per tenerle ferme si dovrà applicare una forza. Ecco che allora il principio di equivalenza pare essere violato, poiché nell’ascensore si manifestano effetti che in un riferimento inerziale non si avrebbero.

Ma è anche chiaro che, se le dimensioni della navicella sono piccole e il tempo dell’osservazione breve, lo spostamento tra le due masse è trascurabile. Esso, infatti, dipende dalla differenza tra le accelerazioni di gravità nei due punti considerati, dovute al fatto che il campo gravitazionale non è uniformemente costante ma ha una simmetria radiale, e dunque quanto più sono vicini i due punti tanto più è piccola questa differenza.

Inoltre, bisogna considerare anche un altro aspetto legato al gradiente della gravità: anche quando si considera un singolo punto massa, ad esempio una particella posta nel centro di massa della navicella spaziale, le dimensioni della particella saranno tali da risentire anche di una forza mareale interna. Un osservatore posto all'interno della navicella allora, avrà modo di capire se si trova in un riferimento in caduta libera in un campo gravitazionale, piuttosto che in un riferimento inerziale, proprio svolgendo esperimenti locali. Osservando una goccia di liquido posta nel centro di massa della navicella, infatti, si può notare che la forma della goccia cambia sotto l'effetto del campo gravitazionale, assumendo una forma ellissoidale con le protuberanze dirette lungo la linea che congiunge la navicella con la Terra. Questo è un effetto mareale, dovuto proprio al fatto che il campo gravitazionale non è omogeneo. Inoltre, se supponiamo che la goccia di liquido sia tenuta insieme dalla forza di gravità piuttosto che dalle forze elettrostatiche tra cui la tensione superficiale (questa ipotesi è poco realistica per una goccia di piccole dimensioni, ma possiamo supporre di utilizzare un liquido tale che la tensione superficiale della goccia sia molto piccola), imponendo che la superficie della goccia sia equipotenziale³ otteniamo:

$$\frac{\Delta h}{R} = \frac{3GM}{2gr_0^3} \quad (1.1.6)$$

dove Δh è l'altezza di marea, R è il raggio della goccia, M è la massa della Terra, g è l'accelerazione di gravità propria della goccia e r_0 è la distanza astronave-Terra. Introducendo la densità del fluido ρ abbiamo:

$$g = G \left(\frac{4\pi\rho R^3}{3} \right) \frac{1}{R^2} \quad (1.1.7)$$

e l'equazione (1.1.6) diventa:

$$\frac{\Delta h}{R} = \frac{9M}{8\pi\rho r_0^3} \quad (1.1.8)$$

L'equazione (1.1.8) mostra che, mentre l'intervallo di marea è tanto maggiore quanto maggiore è il raggio della goccia, la forma dell'ellissoide prodotto dalle forze di marea è invece indipendente dalle dimensioni della goccia. Poiché anche al limite $R \rightarrow 0$ questa deformazione è presente, possiamo

³ Per il calcolo del potenziale mareale si veda il capitolo 3.

considerare l'allungamento della goccia come una misura locale della forza gravitazionale.

Quando si enuncia il Principio di Equivalenza Forte, allora, è necessario fare riferimento a particelle di piccola estensione, in modo tale che questi effetti mareali interni possano essere trascurati.

1.2 La verifica del principio di equivalenza: gli esperimenti

Dato che il principio di equivalenza ricopre un posto tanto importante all'interno della teoria della gravitazione, nel corso del tempo sono stati fatti molti test per verificarne la validità con un'accuratezza sempre migliore. Per stabilire con quale precisione un esperimento ne verifica la validità, viene introdotto un parametro η , chiamato *parametro di Eötvös*, nel modo seguente:

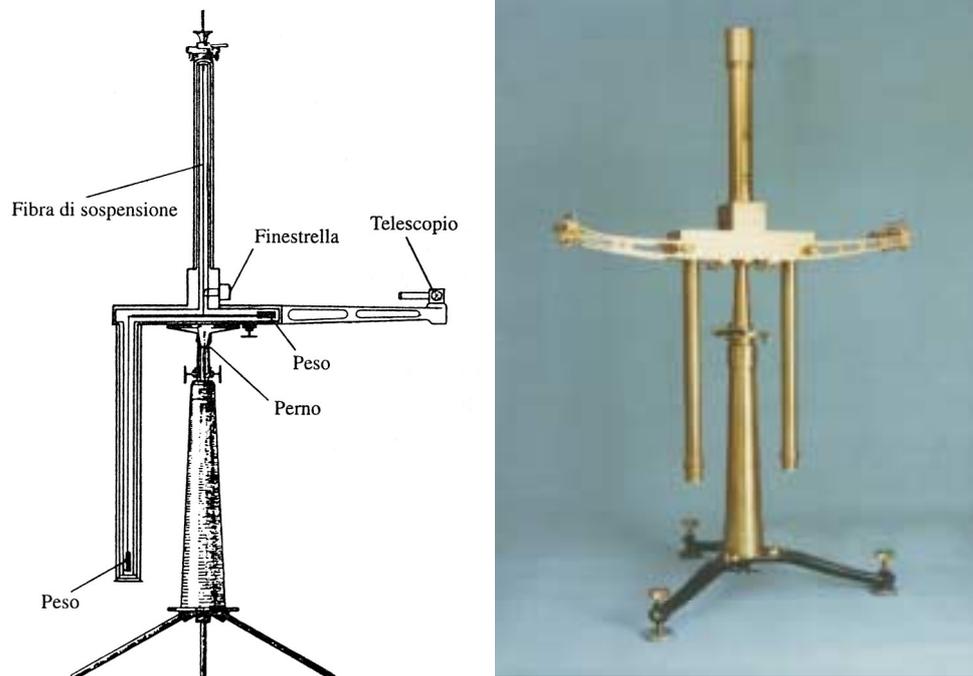
$$\eta = \frac{\left(\frac{m_g}{m_i}\right)^A - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)^B}{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{m_g}{m_i}\right)^A + \left(\frac{m_g}{m_i}\right)^B\right]} \approx \left(\frac{m_g}{m_i}\right)^A - \left(\frac{m_g}{m_i}\right)^B \quad (1.2.1)$$

dove A e B sono i due corpi, di diversa composizione, utilizzati per la verifica.

Le prime prove sperimentali, come già abbiamo accennato nel primo paragrafo, vennero svolte da Galileo e Newton per mezzo dello studio del moto di pendoli diversi, ed in queste verifiche si era arrivati a $\eta = 2 \cdot 10^{-3}$. Utilizzando pendoli di diverso materiale, piombo e sughero per Galileo e oro, argento, piombo, vetro, sabbia ed altri ancora per Newton, i due scienziati verificarono che questi pendoli, lasciati liberi di muoversi, con le stesse condizioni iniziali, nel campo della Terra, oscillavano con le stesse oscillazioni.

È da notare che questi sono *esperimenti di zero*: se il principio di equivalenza è verificato, il comportamento dei due corpi presi in esame sarà esattamente lo stesso e quanto rilevato dagli strumenti (in questo caso la differenza tra i periodi di oscillazione) sarà proprio zero; altrimenti si troverà un effetto differenziale tra i due corpi, dato che non risponderanno entrambi nello stesso modo alla forza gravitazionale.

Il vero passo avanti nella precisione della verifica della validità del principio di equivalenza è stato fatto utilizzando la bilancia di torsione. Fu Eötvös il primo ad introdurre questo strumento attorno al 1890, ideando una struttura in cui due corpi, m e m' , di materiali diversi sono sospesi all'estremità di un braccio a sua volta sostenuto da una fibra di sospensione. La bilancia iniziale proposta da Eötvös era una bilancia asimmetrica in cui i due pesi erano sospesi come mostra il disegno nella *figura 1.2.1*, ma in seguito la struttura venne modificata fino al modello definitivo mostrato nella fotografia.



*figura 1.2.1: Modelli di bilancia di Eötvös.
Disegno del primo modello proposto da Eötvös (a sinistra) e la bilancia poi
utilizzata negli esperimenti (a destra).*

Eötvös utilizzò per l'esperimento corpi di diverso materiale e li confrontò con un corpo in platino, rilevando un'equivalenza tra m_g e m_i con un $\eta = 5 \cdot 10^{-8}$.

Vediamo ora più in dettaglio come funziona la bilancia di torsione. L'apparato costruito da Eötvös può essere schematizzato più semplicemente come nella *figura 1.2.2*:

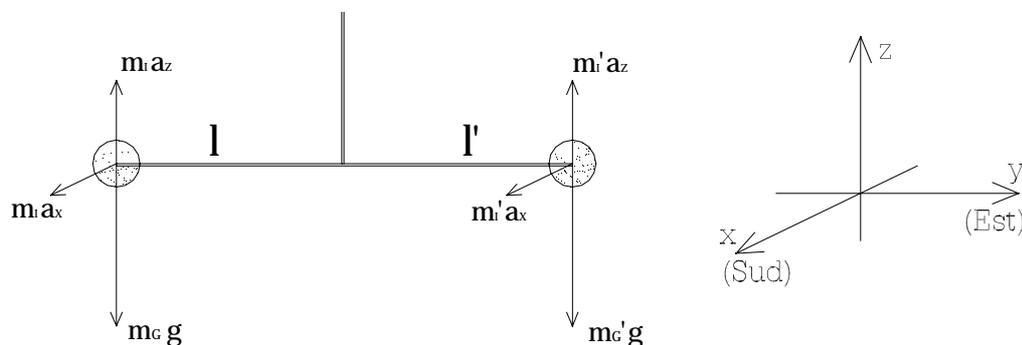


figura 1.2.2: Rappresentazione schematica della bilancia di torsione nel riferimento del laboratorio (a destra)

Se dunque si considerano le forze che agiscono sulle masse test nel riferimento del laboratorio, che non è un riferimento inerziale ma è in rotazione con la Terra, avremo:

- ❖ forza gravitazionale della Terra $\vec{F}_g = m_g \vec{a}_g$, dove \vec{a}_g è l'accelerazione di gravità senza effetti centrifughi, e pertanto è diretta lungo \hat{z} ;
- ❖ forza apparente centrifuga $\vec{F}_c = m_i a_x \hat{x} + m_i a_z \hat{z}$.

Perciò il momento di torsione attorno all'asse z è:

$$\tau = m_i a_x l - m'_i a_x l' \quad (1.2.2)$$

Utilizzando la condizione di equilibrio attorno all'asse x possiamo eliminare l' . Infatti, dalla:

$$(m_g a_g - m_i a_z) l = (m'_g a_g - m'_i a_z) l' \quad (1.2.3)$$

l'equazione (1.2.2) diventa:

$$\tau = m_i a_x l - m'_i a_x l \left(\frac{m_g a_g - m_i a_z}{m'_g a_g - m'_i a_z} \right) = m_i a_x l \frac{a_g (m_i m'_g - m'_i m_g)}{m_i m'_g a_g - m'_i m_g a_z} =$$

$$= m_i a_x l \frac{a_g \left(\frac{m'_g}{m'_i} - \frac{m_g}{m_i} \right)}{\frac{m'_g}{m'_i} a_g - a_z} \quad (1.2.4)$$

e dunque ne consegue che un momento torcente (*torque*) esiste se e solo se $\frac{m'_g}{m'_i} \neq \frac{m_g}{m_i}$.

Nella posizione di equilibrio questo torque definito dall'equazione (1.2.4) sarà compensato dal torque generato dal filo di sospensione. Facendo ruotare l'intero apparato di 180 gradi (cioè scambiando $l - -l$ e $l' - -l'$) il torque della (1.2.4) cambia segno e dunque, ruotando l'apparato, avremo una variazione della posizione di equilibrio.

L'utilizzo della bilancia di torsione introdotta da Eötvös ha così aperto la strada a una serie di esperimenti che ci hanno condotto ad una verifica del principio di equivalenza con una notevole precisione. Una variante importante, ad esempio, del metodo che utilizza questo strumento è quella di Dicke che, nel 1964, utilizzò la bilancia di torsione per rivelare il momento torcente prodotto dalla forza gravitazionale del Sole e dalla forza centrifuga del moto della Terra attorno al Sole. In effetti, se si considera di nuovo la bilancia schematizzata nella [figura 1.2.2](#) e si immagina che questa bilancia si trovi in un laboratorio posto al Polo Nord, avremo che la forza centrifuga giace nel piano orizzontale e, ponendo $l = l'$, il torque attorno all'asse verticale z sarà:

$$\tau = (m_g a_g - m_i a) l \sin \phi - (m'_g a_g - m'_i a) l \sin \phi \quad (1.2.5)$$

dove a_g = modulo dell'accelerazione gravitazionale del sole

a = modulo dell'accelerazione centrifuga nel sistema di riferimento ruotante della Terra attorno al sole

ϕ = angolo tra il braccio della bilancia e il Sole

Con sufficiente approssimazione possiamo considerare $a_g = a$, anche se questa uguaglianza è verificata soltanto nel centro di massa della Terra.

Poiché nell'equazione (1.2.5) è presente una dipendenza dall'angolo ϕ , è ovvio che il momento τ oscilla con periodo 24 ore. Grazie a questa modulazione del segnale, ogni altro rumore che abbia periodo diverso da 24 ore può essere filtrato mediante un'analisi di Fourier e dunque eliminato.

Ulteriori accorgimenti, descritti ampiamente nell'articolo del 1964 “*The Equivalence of Inertial and Passive Gravitational Mass*” [Di], per evitare che l'esperimento venisse compromesso da contaminazioni magnetiche, gradienti di temperatura, effetti elettrostatici ed altri ancora, hanno permesso di raggiungere una precisione pari a $\eta = 3 \cdot 10^{-11}$.

In tempi più recenti (1990), Adelberger *et al.* hanno utilizzato di nuovo una bilancia di torsione per misurare il torque prodotto dalla forza gravitazionale della Terra ma, avendo montato la bilancia su una piattaforma che la fa ruotare attorno al suo asse verticale con un periodo di due ore circa, hanno potuto filtrare ed eliminare qualsiasi rumore che avesse periodo diverso da 2 ore, raggiungendo così $\eta = 10^{-11}$. In un lavoro ancora successivo (1994) lo stesso gruppo di ricerca ha raggiunto un livello di precisione ancora maggiore, arrivando a $\eta = 10^{-12}$. Gli ultimi risultati, riportati in un articolo del Luglio 1999, si spingono fino a $\eta = 10^{-13}$.

Questi sono i principali tentativi fatti fino ad ora per verificare la validità del principio di equivalenza: dunque, è in questo panorama scientifico che si colloca la missione spaziale GG, la costruzione e il lancio di un satellite le cui caratteristiche, come vedremo ampiamente nel prossimo paragrafo, dovrebbero condurci a un notevole passo in avanti sulla precisione di tale verifica.

Nella tabella sottostante sono riportati, in estrema sintesi, gli autori, gli anni e la precisione raggiunta.

Autore dell'esperimento	anno	metodo	$\frac{ m_i - m_g }{m_i}$
Galileo	~1610	pendolo	$< 2 \cdot 10^{-3}$
Newton	~1680	pendolo	$< 10^{-3}$
Bessel	1827	pendolo	$< 2 \cdot 10^{-5}$
Eötvös	1890	bilancia di torsione	$< 5 \cdot 10^{-8}$
Eötvös et al.	1905	bilancia di torsione	$< 3 \cdot 10^{-9}$
Southern	1910	pendolo	$< 5 \cdot 10^{-6}$
Zeeman	1917	bilancia di torsione	$< 3 \cdot 10^{-8}$
Potter	1923	pendolo	$< 3 \cdot 10^{-6}$
Renner	1935	bilancia di torsione	$< 2 \cdot 10^{-10}$

Dicke <i>et al.</i>	1964	bilancia di torsione, con riferimento il Sole	$<3 \cdot 10^{-11}$
Braginsky <i>et al.</i>	1971	bilancia di torsione, con riferimento il Sole	$<9 \cdot 10^{-13}$
Koester	1976	caduta libera di neutroni	$<3 \cdot 10^{-4}$
Keiser <i>et al.</i>	1979	massa fluttuante	$<4 \cdot 10^{-11}$
Niebauer <i>et al.</i>	1987	caduta libera	$<5 \cdot 10^{-10}$
Kuroda e Mio	1989	caduta libera	$<8 \cdot 10^{-10}$
Adelberger <i>et al.</i>	1990	Bilancia di torsione	$<1 \cdot 10^{-11}$
Su <i>et al.</i>	1994	Bilancia di torsione	$<10^{-12}$
Baeßler <i>et al.</i>	1999	Bilancia di torsione	$<10^{-13}$

Tabella⁴ 1.2.1: La tabella mostra gli esperimenti svolti e i risultati fino ad ora raggiunti.

1.3 Esperimenti nello spazio: STEP e il satellite Galileo Galilei (GG)

1.3.1 La verifica del Principio di Equivalenza (PE) nello spazio

Un ulteriore passo avanti nella verifica della validità del principio di equivalenza consiste, teoricamente, nel trasportare questo tipo di esperimento nello spazio. Infatti, poter svolgere le misure nello spazio invece che a terra presenta molteplici vantaggi: l'assenza di rumore sismico, che a Terra risulta essere un rumore molto alto per questo tipo di misure; e, soprattutto, l'assenza di peso (un satellite in orbita attorno alla Terra, infatti, compenserà l'attrazione gravitazionale terrestre con il moto attorno alla Terra stessa).

Per questi motivi, nel 1970 Chapman e Hanson [ChH] proposero di ripetere l'esperimento di Eötvös in un laboratorio in orbita bassa intorno alla Terra con frequenza angolare $\nu_{orb} = 1.67 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$. L'idea era quella di testare il PE usando una bilancia di torsione e di riadattarla in modo da sfruttare al massimo i vantaggi dell'ambiente spaziale. Tuttavia, per minimizzare gli effetti perturbanti dovuti a gradienti di gravità, le modifiche apportate alla bilancia furono sostanziali e, in definitiva, gli scienziati proposero un progetto con due masse di prova coassiali in rotazione. Infatti, dati due corpi cilindrici coassiali A e B, le equazioni delle forze per i due corpi sono:

⁴ Si vedano i riferimenti: [Su], [Bae]

$$\begin{cases} m_i^A \vec{a}_A = -\frac{GM_\oplus m_g^A}{(R_\oplus + h)^3} (\vec{R}_\oplus + \vec{h}) \\ m_i^B \vec{a}_B = -\frac{GM_\oplus m_g^B}{(R_\oplus + h)^3} (\vec{R}_\oplus + \vec{h}) \end{cases} \quad (1.3.1.1)$$

dove h è l'altezza dell'orbita del satellite. L'accelerazione differenziale tra le due masse è:

$$\begin{aligned} \vec{a}_{PE} = \vec{a}_{diff} &= -\frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^3} (\vec{R}_\oplus + \vec{h}) \left(\frac{m_g^A}{m_i^A} - \frac{m_g^B}{m_i^B} \right) = \\ &= -\eta \frac{GM_\oplus}{(R_\oplus + h)^3} (\vec{R}_\oplus + \vec{h}) \end{aligned} \quad (1.3.1.2)$$

Se il principio di equivalenza non è verificato, sarà dunque possibile misurare un'accelerazione differenziale \vec{a}_{PE} diversa da zero. Una volta fissato il valore del parametro η che si intende raggiungere con l'esperimento, la formula (1.3.1.2) ci fornisce anche l'intensità dell'accelerazione che la strumentazione deve essere in grado di rivelare.

L'apparato sperimentale proposto da Chapman e Hanson era costituito da un accelerometro contenente due masse di prova sospese, una del materiale da testare (oro, in questo caso) e l'altra del materiale di riferimento (alluminio). L'accelerometro, a sua volta, era montato su una piattaforma di alluminio ed era vincolato a muoversi radialmente lungo un diametro della piattaforma. Per modulare la frequenza del segnale da misurare, invece, la piattaforma era costruita in modo da poter ruotare attorno ad un asse perpendicolare al piano orbitale con una frequenza angolare pari a $\nu_{spin} = 1.67 \text{ Hz}$. La posizione a riposo della piattaforma, così come quella delle masse test, era coincidente con il centro di massa del sistema. Dunque, poiché le masse test rispondono nello stesso modo a tutte le forze applicate tranne che ad una eventuale a_{PE} , misurando la posizione effettiva delle masse test e la loro relativa distanza, era possibile verificare la validità del principio di equivalenza: se tale principio è verificato, infatti, la distanza relativa tra le due masse sarà nulla; ma se è violato, nello stato stazionario l'ampiezza dello spostamento dovuto ad una accelerazione a_{PE} sarà di circa 10^{-8} cm per $\eta = 10^{-14}$.

Studi successivi [MrB], tuttavia, hanno mostrato che un sistema ruotante come quello proposto da Chapman e Hanson è fortemente instabile.

Dagli inizi degli anni '70, comunque, un altro progetto per la verifica del PE nello spazio si è imposto all'attenzione della comunità scientifica: il progetto STEP (*Satellite Test of Equivalence Principle*), concepito a Stanford da Worden e Everitt, che si propone di testare il PE con $\eta = 10^{-17}$. Anche in questo progetto [STEP-A] vengono utilizzate due masse test coassiali di forma cilindrica, ma questa volta le due masse non sono montate su una piattaforma ruotante. Per modulare il segnale, infatti, viene sfruttato il moto orbitale dello *spacecraft*: per mezzo di un accurato controllo attivo, l'assetto dello *spacecraft* è mantenuto costante rispetto ad un sistema inerziale e, perciò, le masse cilindriche al suo interno si trovano ad orbitare intorno alla Terra mantenendo fissa la loro orientazione. L'asse di simmetria dei cilindri giace sul piano orbitale ed è quello lungo il quale viene rivelato il segnale di un'eventuale violazione del PE. Se uno dei due cilindri è attratto dalla Terra più dell'altro, c'è un movimento relativo tra i due e l'effetto è massimo quando l'asse di simmetria è rivolto verso il centro della Terra ed è nullo quando è perpendicolare alla direzione satellite-Terra come mostrato in figura.

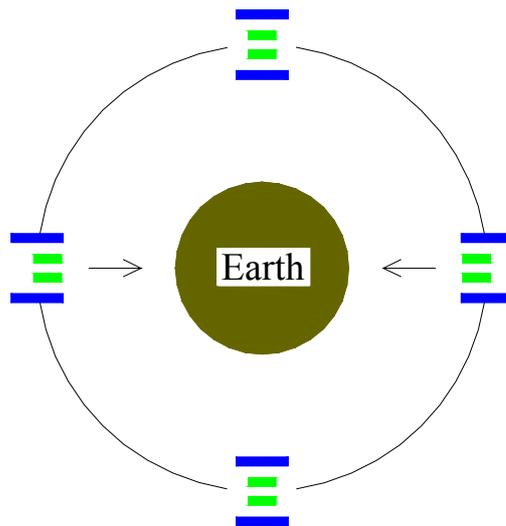


figura 1.3.1.1: Rappresentazione schematica del satellite STEP e della sua orbita.

Una violazione del PE produrrà, allora, un segnale di intensità variabile alla frequenza orbitale del satellite (che ha un periodo, in orbita bassa attorno alla Terra, di circa 6000 *sec*). Tuttavia, l'aver scelto di rilevare il segnale lungo l'asse di simmetria dei cilindri fa sì che si abbia un *noise* che compete direttamente con il segnale. In condizioni di bassa pressione, infatti, un cilindro, le cui facce siano a temperature diverse, è soggetto ad una

accelerazione lungo l'asse di simmetria e, se la pressione residua del gas non è notevolmente bassa, il valore assunto da questa accelerazione può essere anche molto grande. Per eliminare questo disturbo, che in letteratura prende il nome di *effetto radiometrico*, si è scelto, per STEP, di lavorare in ambiente criogenico, utilizzando elio superfluido. Tuttavia, la grande quantità di elio prevista per operare a bassa temperatura, alcune centinaia di litri, può causare altre perturbazioni sull'esperimento ed è un problema che ancora è in fase di studio. Infatti, malgrado i numerosi progetti presentati (Worden e Everitt, 1973; Worden, 1976; Worden, 1987; Blaser *et al.*, 1993; Blaser *et al.*, 1996), il satellite STEP non ha superato la selezione per lo *studio di fase B*, ed è attualmente in progetto una variante di minor costo e dimensioni, MiniSTEP.

1.3.2 Il satellite Galileo Galilei (GG)

Agli inizi degli anni '90 è stato progettato presso l'Università di Pisa (Bramanti, Nobili, e Catastini, 1992; Nobili *et al.*, 1993; Nobili *et al.*, 1995) il satellite Galileo Galilei (GG), allo scopo di testare il principio di equivalenza con una precisione di una parte su 10^{17} .

Come per il progetto STEP si tratta di un piccolo satellite ideato per un'orbita bassa attorno alla Terra e, al suo interno, si trovano due masse di prova cilindriche e coassiali. Rispetto ai precedenti progetti, però, questo presenta alcuni aspetti innovativi che mettono in discussione varie scelte operate nella fase di progettazione di STEP. Infatti, con STEP questo satellite non condivide la scelta di rilevare il segnale alla frequenza orbitale (che è ritenuta troppo bassa per il rumore elettronico e che comunque necessita di un attento controllo attivo dell'assetto); l'idea di operare a bassa temperatura impiegando grosse quantità di elio; la scelta di compensare il *drag* per mezzo di propulsioni ad elio a regolazione meccanica e il fatto che non sia possibile mettere a terra le masse di prova (questo comporta perturbazioni elettrostatiche). Al contrario, per GG si è scelto di modulare la frequenza di un'eventuale violazione del PE facendo ruotare l'intero satellite ad alta frequenza ($\nu_{spin} \cong 5 \text{ Hz}$).

Questa rotazione, attorno all'asse di massimo momento di inerzia, che è, per costruzione, anche asse di simmetria, presenta un duplice vantaggio perché, oltre alla modulazione del segnale, provvede ad una stabilizzazione passiva del satellite.

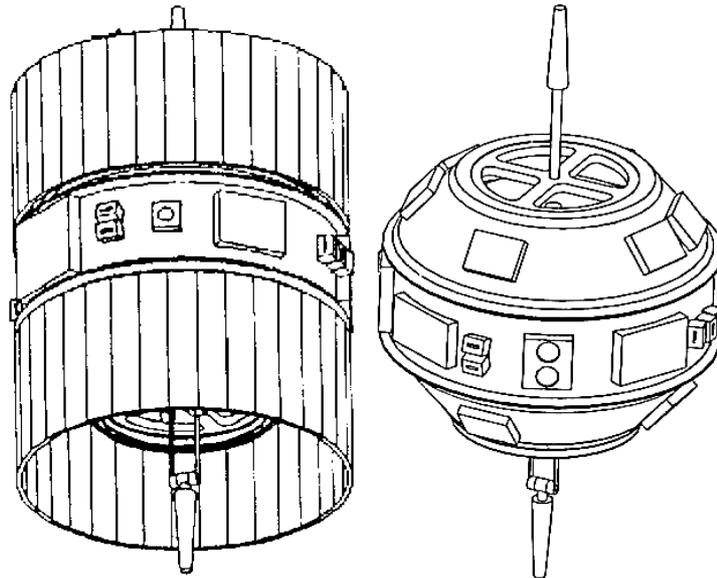


figura 1.3.2.1: La figura mostra il satellite così come apparirà una volta costruito. A destra è disegnato il satellite vero e proprio, mentre a sinistra è rappresentato il rivestimento fatto di pannelli solari.

L'orbita proposta è quasi circolare e quasi equatoriale e l'asse di spin del satellite è circa perpendicolare al piano orbitale. Quest'ultima scelta permette di massimizzare il segnale eventuale di violazione del PE e di evitare manovre per modificare l'assetto che non sono necessarie ad inclinazione zero [GG-A]. Per quanto riguarda l'altezza dell'orbita, invece, questa deve essere il compromesso tra due opposte necessità: un'orbita alta, infatti, permetterebbe di ridurre l'effetto perturbativo dell'atmosfera residua (almeno finché questo non diventa comparabile con l'effetto della pressione di radiazione solare, circa a 640 km); ma, d'altra parte, poiché l'eventuale accelerazione differenziale, dovuta alla violazione del PE, è data da $a_{PE} = \eta GM_{\oplus} / (R_{\oplus} + h)^2$ dove h è l'altezza del satellite, un'orbita bassa permetterebbe di avere un segnale di maggiore intensità. Nel disegno attuale, l'altezza proposta è di 520 km .

La scelta di un'orbita equatoriale, però, presenta il grosso problema delle forti variazioni termiche: infatti, il satellite si trova poco più della metà del suo periodo orbitale (che è di circa 5700 sec) nella luce solare diretta, mentre per il tempo restante attraversa l'ombra della Terra, con una conseguente variazione termica di diverse decine di gradi. Tuttavia, grazie all'isolamento termico e alla rapida rotazione dello *spacecraft*, gli effetti perturbativi dovuti al gradiente termico possono essere ridotti al di sotto della sensibilità necessaria.

All'interno del satellite si trovano, come abbiamo detto, le masse test. Le due masse cilindriche sono poste all'interno di un laboratorio, la *Pico Gravity Box* (PGB), grazie al quale è possibile ridurre moltissimo il rumore vibrazionale dello *spacecraft*. La PGB, infatti, anch'essa di forma cilindrica e in rotazione con il satellite a ν_{spin} , è sospesa allo *spacecraft* per mezzo di molle elicoidali di bassa costante elastica: ciò permette una riduzione del rumore vibrazionale al di sopra della sua frequenza naturale di oscillazione, ma permette anche di avere corpi elettricamente messi a terra, eliminando il pericolo di perturbazioni elettrostatiche. Tali perturbazioni, infatti, costituiscono uno dei maggiori problemi degli esperimenti di gravitazione, compreso STEP: poiché il rapporto tra l'interazione elettrica e quella gravitazionale è circa 10^{40} , la presenza di cariche elettriche sulle masse test può produrre forze molto più grandi del segnale gravitazionale. Nel caso di GG, diversamente da quanto accadeva nei precedenti progetti, la presenza di sospensioni meccaniche conduttrici rende possibile la messa a terra delle masse test.

Alla PGB sono sospesi elasticamente due corpi cilindrici di diversa composizione, vuoti, concentrici e coassiali, di massa pari a 10 kg ciascuno, che costituiscono le due masse test. I due cilindri sono accoppiati, per mezzo di molle con costante elastica k molto bassa, alle estremità di due aste rigide, ciascuna delle quali è imperniata nel suo punto medio a giunti cardanici elastici, così da poter cambiare leggermente orientazione in tutte le direzioni. Poiché le masse test sono in caduta nel campo gravitazionale della Terra, una violazione del PE farà sì che le due masse cadano in maniera diversa, con un conseguente spostamento dei loro centri di massa fino al raggiungimento di una nuova posizione di equilibrio.

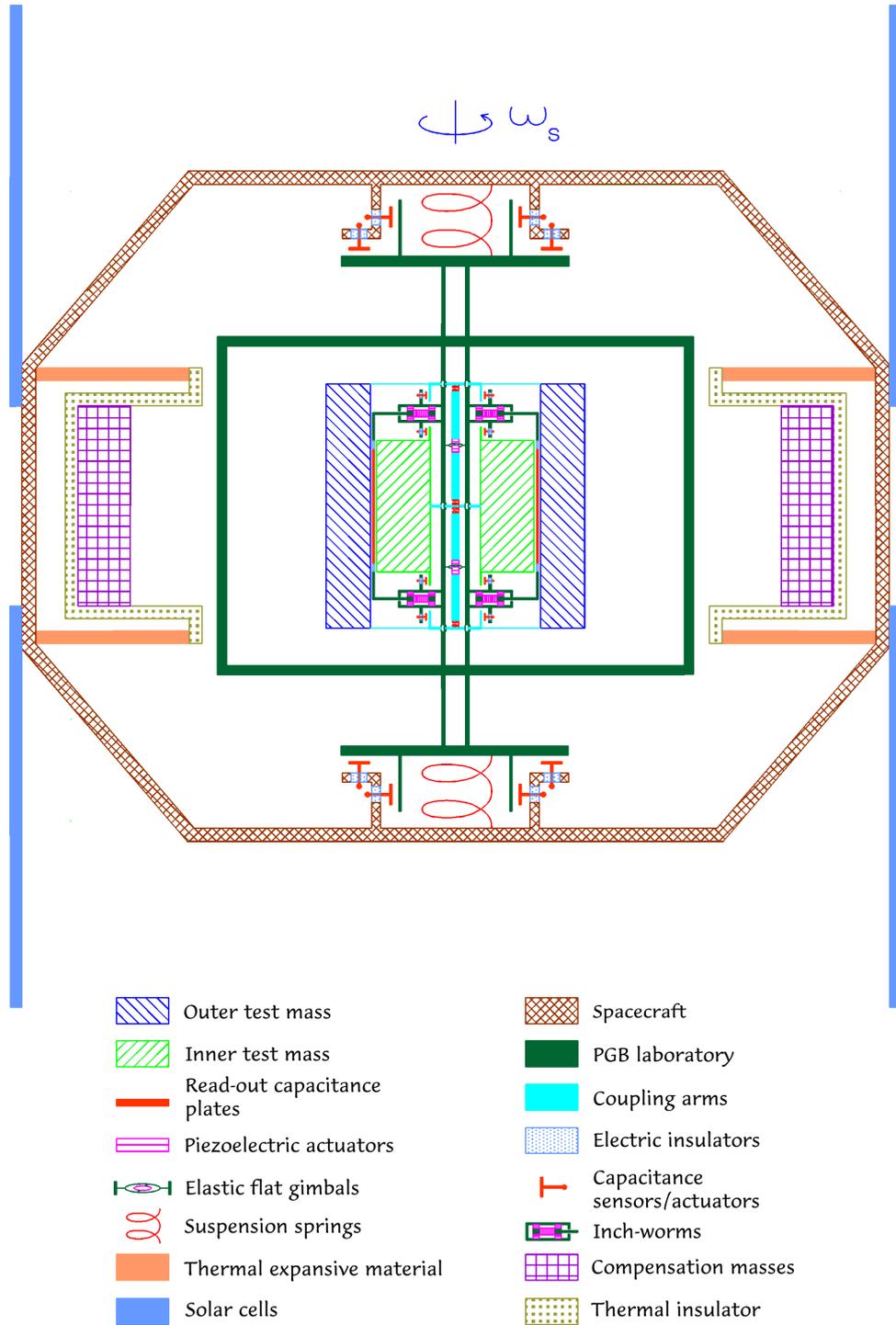


figura 1.3.2.2: Schema dell'interno del satellite Galileo Galilei (GG)

Per accorgersi di una piccola forza differenziale nel piano perpendicolare all'asse di spin, allora, è necessario riuscire a rilevare uno spostamento tra gli assi delle masse test molto piccolo: per raggiungere $\eta = 10^{-17}$ il sistema di lettura deve essere in grado di rilevare un'accelerazione differenziale tra i cilindri pari a $a_{PE} \cong 8.4 \cdot 10^{-15} \text{ cm/sec}^2$ e quindi uno spostamento relativo

$$\Delta x_{PE} = \frac{a_{PE}}{\omega_d^2} \cong 6.3 \cdot 10^{-11} \text{ cm}, \text{ dove } \omega_d \cong 1.15 \cdot 10^{-2} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$$

delle oscillazioni differenziali delle masse test (cioè si ha un periodo naturale di $T \cong 545 \text{ sec}$). Per raggiungere questo livello di precisione, tra le masse test sono inserite delle piastre capacitive in modo da poter trasformare una variazione della distanza dei centri di massa dei cilindri in un segnale elettrico. Sul funzionamento delle piastre capacitive, comunque, ritorneremo in seguito. Dunque, un'eventuale violazione del PE produrrà un segnale nel piano orbitale lungo la direzione *satellite-centro della Terra* (come è mostrato nella *figura 1.3.2.3*). In assenza di spin questo segnale avrà intensità costante (se si trascura l'eccentricità dell'orbita del satellite che, comunque, è circa zero) e una direzione che cambia alla frequenza orbitale (per GG tale frequenza è $\nu_{orb} = 1.75 \cdot 10^{-4} \text{ Hz}$).

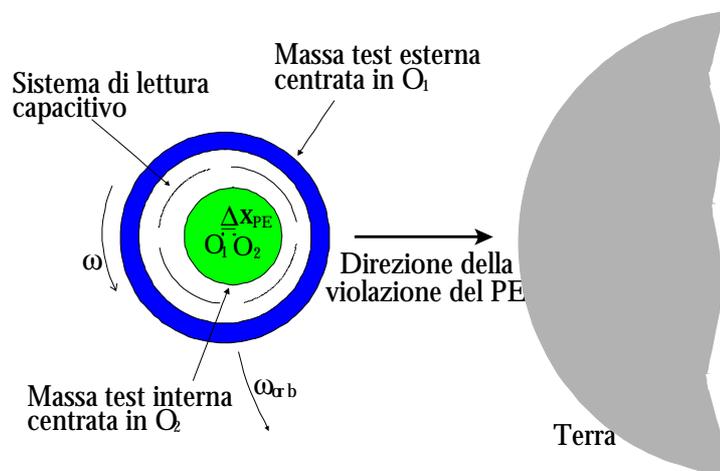


figura 1.3.2.3: Il segnale atteso per l'eventuale violazione del Principio di Equivalenza

1.3.3 Il sistema di lettura capacitivo

Una particolare attenzione va rivolta al sistema di lettura utilizzato sul satellite GG e, come vedremo nel prossimo capitolo, sul prototipo a terra GGG. Per misurare un eventuale segnale di violazione del principio di

equivalenza, infatti, è necessaria una precisione strumentale che consenta di misurare uno spostamento dell'ordine di $5 \cdot 10^{-11} \text{ cm}$: tale precisione si può raggiungere utilizzando un particolare sistema di sensori capacitivi. Si tratta di quattro piastre conduttrici, ognuna sezione di un cilindro concentrico alle masse test, poste fra le due masse di prova. In questo modo si formano quattro capacità, ognuna delle quali risulta dal parallelo del condensatore formato dal cilindro interno e dalla piastra e dalla piastra e dal cilindro esterno. Alle piastre si applica un segnale alternato V_{in} mentre le masse test sono messe a terra.

Le distanze fra le piastre e i cilindri determinano la capacità dei condensatori e, dunque, un eventuale spostamento delle masse test provoca una variazione del segnale in uscita V_{out} che può essere registrata. Se si calcola la capacità dei condensatori con la formula dei condensatori piani (tale approssimazione può essere fatta nel nostro caso perché le distanze tra i cilindri e le piastre sono piccole rispetto alle dimensioni lineari delle piastre), abbiamo che la capacità all'istante iniziale è:

$$C_1^0 = C_2^0 = C_0 = \epsilon_0 S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) = \epsilon_0 S \frac{a+b}{ab} \quad (1.3.3.1)$$

dove S è la superficie delle piastre e a e b sono, rispettivamente, le distanze iniziali tra il cilindro interno e le piastre e tra le piastre e il cilindro esterno. Uno spostamento dei cilindri test provocherà quindi un cambiamento dei valori di a e b e, se le piastre sono poste ortogonalmente a due assi fra loro perpendicolari e che si intersecano sull'asse dei cilindri (*figura 1.3.3.1*) avremo modo anche di riconoscere la direzione dello spostamento dei cilindri. Inoltre, la capacità varierà in maniera diversa a seconda che si tratti di uno spostamento comune delle due masse oppure differenziale: infatti, si può dimostrare ([GLC, pag24], [EPS]) che la variazione della capacità nel primo caso è legata alla formula:

$$\Delta C = \frac{C_2 - C_1}{2 C_0} = \Delta x_{Com} \frac{(a-b)}{ab} \quad (1.3.3.2)$$

mentre nel secondo caso:

$$\Delta C = \frac{C_2 - C_1}{2 C_0} = \Delta x_{Diff} \frac{(a^2 + b^2)}{ab(a+b)} \quad (1.3.3.3)$$

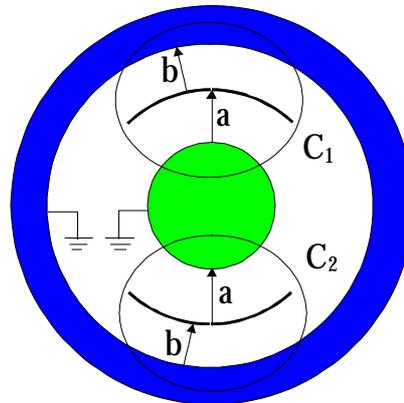


figura 1.3.3.1: Sezione ortogonale all'asse dei cilindri. Nel disegno compaiono soltanto due piastre capacitive: le altre due si immaginino ruotate di 90 gradi rispetto alle prime.

Un problema delicato da risolvere, dunque, è il bilanciamento meccanico del ponte, cioè fare in modo che le piastre capacitive siano posizionate inizialmente ad uguale distanza dalla superficie delle masse test e fare in modo che rimangano il più possibile in questa posizione per tutta la durata dell'esperimento. Se ciò non accade, infatti, si rischia di compromettere l'esperimento, poiché per rivelare il segnale di violazione del principio di equivalenza è necessario che lo spostamento differenziale Δx_{EP} che questo segnale produce sia maggiore del più grande spostamento comune, ovvero che si realizzi la condizione:

$$\frac{a-b}{a^2} < \frac{\Delta x_{EP}}{\Delta x_{Com}} \quad (1.3.3.4)$$

Nel caso del satellite GG, il più grande effetto comune è dato dalla resistenza dell'aria tangente all'orbita (*attrito atmosferico*). Poiché il valore dell'effetto massimo è stimato $\Delta x_{Com} \cong 1.43 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$, per $a = 0.5 \text{ cm}$ deve essere $(a-b) \leq 0.2 \mu\text{m}$. Tale livello di bilanciamento può essere raggiunto facendo uso di inch-worms, particolari attuatori piezoelettrici che hanno il vantaggio di raggiungere spostamenti relativamente grandi attraverso una successione di passi molto piccoli, e di non necessitare più di tensione una volta raggiunta la configurazione desiderata (ciò significa che non c'è dissipazione).

Sommario del Capitolo 1

Il principio di equivalenza e la sua verifica	4
1.1 Il principio di equivalenza.....	4
1.1.1 Definizione e cenni storici	4
1.1.2 Il principio di equivalenza forte (o di Einstein)	8
1.2 La verifica del principio di equivalenza: gli esperimenti.....	11
1.3 Esperimenti nello spazio:	
STEP e il satellite Galileo Galilei (GG).....	16
1.3.1 La verifica del Principio di Equivalenza (PE) nello spazio	16
1.3.2 Il satellite Galileo Galilei (GG).....	19
1.3.3 Il sistema di lettura capacitivo	23