

## Capitolo 2

### *Galileo Galilei on The Ground (GGG)*

#### 2.1 Il prototipo a terra: GGG

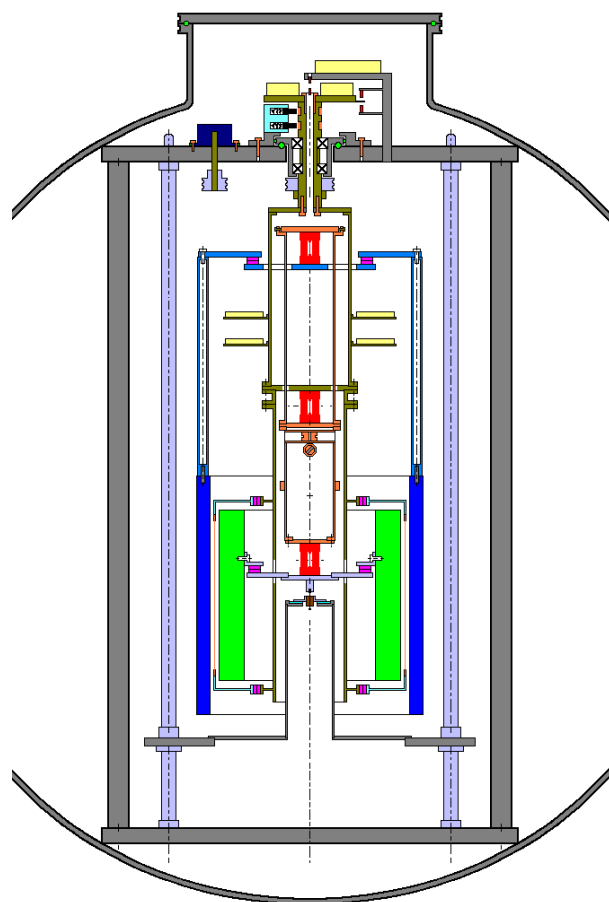
Galileo Galilei on the Ground è il progetto per un esperimento a terra che ha lo scopo di raggiungere due importanti obiettivi: da una parte verificare, con misurazioni svolte interamente a terra, il principio di equivalenza per un  $\eta = 10^{-13}$ ; e dall'altra testare il funzionamento della strumentazione che verrà poi impiegata nella missione spaziale.

Proprio per soddisfare questa seconda esigenza, l'intero apparato è stato concepito come un vero e proprio prototipo a terra del satellite GG, e infatti presenta la struttura e le peculiari caratteristiche del satellite che già abbiamo analizzato nel corso del *capitolo 1*. Tuttavia, l'apparato dell'esperimento terrestre è soggetto a disturbi e rumori diversi rispetto a quelli cui è sottoposto il satellite e, per far fronte a questa diversità, sono state apportate delle modifiche strutturali importanti.

Le masse di prova utilizzate sono due cilindri concentrici e coassiali realizzati in diverso materiale, proprio come nell'esperimento spaziale e, per misurare la distanza differenziale tra i cilindri, si utilizza di nuovo un sistema di sensori capacitivi. Sulla Terra, però, abbiamo a che fare con la forza peso, e quindi si presenta il problema di accoppiare le masse di prova debolmente, poiché delle molle molto sensibili, come quelle utilizzate nell'esperimento spaziale, sarebbero sottoposte a sollecitazioni troppo grandi, con la conseguente rottura. I cilindri test, allora, nell'esperimento terrestre sono accoppiati per mezzo di un'asta di bilanciamento, e sospesi alle due estremità di quest'asta per mezzo di speciali molle molto rigide nella direzione della forza peso ma, contemporaneamente, molto sensibili nel piano ortogonale a questa direzione. Il sistema è in rotazione supercritica a  $5\text{ Hz}$ , e questo permette da una parte la modulazione del segnale ad alta frequenza e dall'altra l'autocentratura dei due cilindri. Infatti, una volta controllati tutti gli effetti legati alla dissipazione di energia di spin dovuta alla deformazione delle sospensioni durante la rotazione (*moti di whirl*), si dimostra che, nelle condizioni di rotazione supercritica, i centri di massa dei cilindri raggiungono l'equilibrio allineandosi molto vicino all'asse di rotazione [MrB].

Attualmente, le prove sul prototipo a terra sono in fase di realizzazione presso i laboratori della Laben, a Firenze. La struttura e le caratteristiche geometriche di questo prototipo sono ormai fisse (in un primo momento, la ricerca era volta a trovare le condizioni ottimali per minimizzare i vari rumori ed effetti di disturbo: sono dunque state fatte diverse prove per la lunghezza del braccio di bilanciamento, le caratteristiche dei cilindri, e tutto ciò su cui era possibile intervenire per ridurre i motivi di rumore).

Infine, gli esperimenti si svolgono all'interno di una camera a vuoto.



*figura 2.1.1: Sezione lungo l'asse verticale di spin dell'apparato GGG. In verde è indicata la massa test interna, mentre in blu la massa test esterna. Le sospensioni laminari sono disegnate in rosso, mentre, nella parte in alto del disegno, si può riconoscere il motore che mette in rotazione l'intero sistema. Infine, il prototipo si trova all'interno di una camera a vuoto.*

## 2.2 Il segnale di violazione

Lo scopo dell'esperimento a terra GGG è rivelare un eventuale spostamento differenziale tra due masse di prova di diversa composizione che si trovano all'interno di un campo gravitazionale. Come abbiamo già visto descrivendo

gli esperimenti sul principio di equivalenza svolti fino ad ora sulla superficie terrestre (*capitolo 1*), si può prendere come sorgente di questo campo gravitazionale la Terra oppure il Sole. Se si sceglie come sorgente la Terra, l'eventuale violazione del principio di equivalenza produrrà uno spostamento costante tra le due masse test, modulato soltanto dalla rotazione dell'apparato. In questo caso, tutti gli effetti che producono uno spostamento costante tra le masse, come ad esempio gli effetti giroscopici che si hanno sulle masse ruotanti [GLC], o la non uniformità del campo gravitazionale prodotto da uno sferoide oblato (*paragrafo 2.5*), contribuiscono a sporcare l'eventuale segnale di violazione, dando luogo a un rumore molto grande rispetto al segnale da estrarre. Prendendo come sorgente il Sole, invece, il segnale di violazione è modulato anche dal moto apparente del Sole rispetto alla Terra, e il suo periodo di circa 24 ore ci permette di distinguerlo da tutti gli altri segnali che rimangono, invece, costanti. Vediamo ora più in dettaglio qual è il segnale che ci aspettiamo.

Se scriviamo le equazioni delle forze per due masse test  $A$  e  $B$  che si trovano sulla superficie terrestre all'interno del campo generato dal Sole, abbiamo che:

$$m_i^A \vec{a}^A = -m_g^A \frac{GM_{Sole}}{R_A^3} \vec{R}_A + m_i^A \left( \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_{TS}) \right) \quad (2.2.1)$$

$$m_i^B \vec{a}^B = -m_g^B \frac{GM_{Sole}}{R_B^3} \vec{R}_B + m_i^B \left( \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{R}_{TS}) \right) \quad (2.2.2)$$

dove  $\vec{R}_A$  e  $\vec{R}_B$  sono i vettori che individuano, a partire dal centro di massa del Sole, la posizione dei centri di massa dei due corpi  $A$  e  $B$ ,  $\vec{R}_{TS}$  è il vettore che individua il centro di massa della Terra e  $\omega$  è la velocità angolare di rivoluzione della Terra attorno al Sole. Nello scrivere le equazioni delle forze per i due corpi non abbiamo considerato la forza di attrazione gravitazionale della Terra né la forza centrifuga dovuta alla rotazione della Terra stessa attorno al proprio asse, poiché, per il momento, ci interessa mostrare quale segnale produrrà una eventuale violazione del principio di equivalenza. Inoltre, se le masse test sono prese coassiali, come accade nel nostro esperimento, i due vettori  $\vec{R}_A$  e  $\vec{R}_B$  coincidono.

Dunque, tornando all'equazione (2.2.1), possiamo sostituire all'accelerazione centrifuga l'accelerazione gravitazionale che si ha nel centro della Terra, poiché nel centro di massa della Terra le due accelerazioni, in modulo, sono uguali. Dalla (2.2.1) si ha:

$$m_i^A \vec{a}^A = -m_g^A \frac{GM_{Sole}}{R^3} \vec{R} + m_i^A \frac{GM_{Sole}}{R_{TS}^3} \vec{R}_{TS} \quad (2.2.3)$$

poiché:

$$\left| \left( \vec{\omega} \times \left( \vec{\omega} \times \vec{R}_{TS} \right) \right) \right| = \left| \frac{GM_{Sole}}{R_{TS}^3} \vec{R}_{TS} \right|$$

Se scriviamo la massa gravitazionale in termini della massa inerziale, introducendo dunque il parametro  $\eta$ , abbiamo che:

$$\begin{aligned} m_g^A &= m_i^A \left( 1 + \frac{\eta}{2} \right) \\ m_i^A \vec{a}^A &= -GM_{Sole} m_i^A \left( \frac{\vec{R}}{R^3} + \frac{\eta}{2} \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{R}_{TS}}{R_{TS}^3} \right) \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Per il corpo  $B$  possiamo scrivere un'equazione analoga. Infatti, ponendo:

$$m_g^B = m_i^B \left( 1 - \frac{\eta}{2} \right)$$

dall'espressione (2.2.2) abbiamo:

$$m_i^B \vec{a}^B = -GM_{Sole} m_i^B \left( \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\eta}{2} \frac{\vec{R}}{R^3} - \frac{\vec{R}_{TS}}{R_{TS}^3} \right) \quad (2.2.5)$$

e, confrontando la (2.2.4) e la (2.2.5), si ottiene:

$$\vec{a}_{EP} = \vec{a}^B - \vec{a}^A = \eta \frac{GM_{Sole}}{R^3} \vec{R} \quad (2.2.6)$$

Poiché GGG si propone di verificare la validità del principio di equivalenza per un  $\eta = 10^{-13}$ , l'ordine dell'accelerazione differenziale tra le due masse attesa nel caso di una violazione del principio è  $\vec{a}_{EP} \approx 0.6 \cdot 10^{-13}$ .

Si noti che il vettore  $\vec{R}$  che compare nell'equazione (2.2.6) è il vettore che individua la posizione del centro di massa dei corpi-test rispetto al Sole. Poiché l'esperimento si svolge in un laboratorio solidale con la Terra, il Sole compie un moto apparente sulla sfera celeste a causa della rotazione della Terra attorno al proprio asse. Il vettore  $\vec{R}$ , dunque, sarà strettamente legato al periodo di rotazione della Terra (24 ore), e questo è ciò che provoca la modulazione a 24 ore del segnale di violazione.

### 2.3 Modellizzazione del prototipo

Per riuscire a studiare le forze che agiscono sul prototipo a terra è necessario realizzare un modello matematico dell'apparato: tale modello è rappresentato nella *figura 2.3.1* ed è costituito da tre corpi rigidi accoppiati:

- ❖ un'asta di bilanciamento di lunghezza  $2L + \Delta L$  sospesa non nel suo centro di massa ma  $\frac{\Delta L}{2}$  centimetri sotto di esso;
- ❖ due cilindri cavi di raggio interno  $r_i^{\text{int}}$  e raggio esterno  $r_i^{\text{est}}$  e di lunghezza  $h_i$  (con  $i = 1, 2$ ), sospesi per il proprio centro di massa rispettivamente ad una distanza  $L_1$  e  $L_2$  dall'estremità dell'asta di bilanciamento.

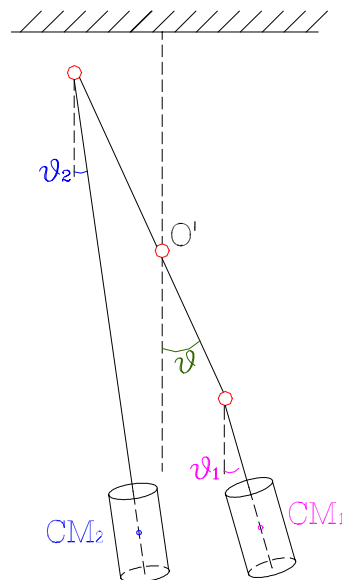


figura 2.3.1: Rappresentazione schematica del prototipo GGG.

I cerchietti rossi rappresentano invece le sospensioni laminari, molle molto sensibili nel piano orizzontale (in modo che gli oggetti del sistema risultino accoppiati debolmente) ma adatte a sostenere il peso lungo la verticale. A seconda delle forze e degli aspetti che vorremo studiare di volta in volta questo modello potrà essere sostituito con uno più semplice, su cui sia più facile svolgere i calcoli che ci interessano. Ad esempio quando non saremo interessati allo studio della forza di Coriolis che agisce sui cilindri-test o agli effetti legati alla rotazione dei cilindri stessi, schematizzeremo le masse-test con delle sbarrette sottili invece che con i cilindri: sulla scelta fatta per le approssimazioni ritorneremo anche in seguito, ogni volta che sarà necessario.

Come sistema di riferimento, fisso nel laboratorio, è stato scelto per lo studio del problema quello con l'origine nel centro di massa della Terra, l'asse Z nella direzione della congiungente il punto di sospensione dell'asta di bilanciamento con il centro di massa della Terra, e l'asse X e l'asse Y in un piano parallelo al piano orizzontale ma passante per il centro della Terra, diretti il primo verso ovest mentre il secondo verso sud.

Come sappiamo, per descrivere il moto di un corpo solido si possono utilizzare le tre coordinate del centro di massa del corpo stesso e tre angoli che determinino l'orientazione degli assi  $(x_1, x_2, x_3)$  di un sistema di riferimento mobile, dove ad esempio gli assi sono gli assi principali di inerzia del solido. Consideriamo separatamente i tre oggetti che costituiscono il nostro sistema, analizzando inizialmente l'asta di bilanciamento. Poiché per il momento ci interessano soltanto gli angoli tra gli assi coordinati, si può traslare il sistema di riferimento fisso  $(X, Y, Z)$  fino a far coincidere la sua origine con quella del sistema mobile  $(x_1, x_2, x_3)$ , e fissare tale origine nel punto  $O'$  di sospensione dell'asta di bilanciamento. In questo modo, per grandezze che definiscono la posizione degli assi  $(x_1, x_2, x_3)$  rispetto agli assi  $(X, Y, Z)$  prendiamo gli angoli  $\vartheta, \varphi, \psi$  come mostrato in figura:

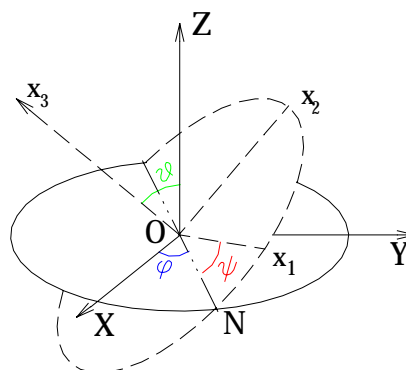


figura 2.3.2: Angoli di Eulero.

l'angolo  $\vartheta$  è quello compreso tra gli assi  $Z$  e  $x_3$ , l'angolo  $\phi$  è compreso tra gli assi  $X$  e  $N$  (il piano mobile  $x_1x_2$  taglia il piano fisso  $XY$  lungo la retta che passa per  $O$  e  $N$  e che è detta *linea dei nodi*) e l'angolo  $\psi$  tra gli assi  $N$  e  $x_1$ . Tali angoli in meccanica classica prendono il nome di *angoli di Eulero*.

Procedendo in modo analogo, è possibile definire i sistemi mobili anche per gli altri due corpi, che saranno individuati rispettivamente dagli angoli di Eulero  $\vartheta_1, \phi_1, \psi_1$  e  $\vartheta_2, \phi_2, \psi_2$ . Per comodità, utilizzeremo in seguito le coordinate  $\phi'_i = \phi_i + \frac{\pi}{2}$  ( $i=1, 2$ ) che rappresentano gli angoli tra la linea dei nodi del cilindro  $i$ -esimo e l'asse fisso  $X$ .

Per quel che riguarda le coordinate dei centri di massa, bisognerà invece tener presente che l'asta di bilanciamento non è sospesa nel suo centro di massa ma, come abbiamo già detto,  $\frac{\Delta L}{2}$  centimetri sotto di esso, per cui, nel sistema fisso  $(X, Y, Z)$ , avremo i vettori:

$\vec{R}_T = (0, 0, R_T)$  che individua il punto di sospensione  $O'$  ( $R_T$  è la distanza tra il punto di sospensione e il centro di massa della Terra)

$\vec{R}_{cma} = -(\Delta L/2)(\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, -\cos \vartheta)$  che individua il centro di massa dell'asta di bilanciamento a partire dal punto di sospensione  $O'$

$\vec{R}_{s1} = L(\sin \vartheta \cos \phi, \sin \vartheta \sin \phi, -\cos \vartheta)$  che individuano i punti di sospensione dei due rotori a partire dal punto  $O'$

$\vec{R}_{s2} = (L + \Delta L)(-\sin \vartheta \cos \phi, -\sin \vartheta \sin \phi, \cos \vartheta)$

e

$\vec{R}_{cm1} = L_1(\sin \vartheta_1 \cos \phi'_1, \sin \vartheta_1 \sin \phi'_1, -\cos \vartheta_1)$  che individuano i centri di massa dei due rotori a partire dai rispettivi punti di sospensione.

$\vec{R}_{cm2} = L_2(\sin \vartheta_2 \cos \phi'_2, \sin \vartheta_2 \sin \phi'_2, -\cos \vartheta_2)$

Una volta descritto il modello e il sistema di riferimento, possiamo iniziare ad analizzare le forze che agiscono sul nostro sistema.

## 2.4 Le forze

Le forze che agiscono sull'apparato e che prenderemo in esame in questo paragrafo sono le seguenti:

- ❖ *gravitazionali* (ad opera della Terra e del Sole. La forza esercitata dal Sole è stata considerata separatamente come forza mareale);
- ❖ *elastiche*, dovute alla presenza delle sospensioni laminari;
- ❖ *apparenti* (forza centrifuga e di Coriolis) dovute all'aver scelto un sistema di riferimento non inerziale ma in rotazione con la Terra.

Dobbiamo dunque trattare con forze “classiche” di cui ben conosciamo l'andamento. La difficoltà di questo lavoro nasce allora quando vogliamo studiare come queste forze agiscono sul sistema che, come abbiamo visto, è piuttosto complesso: quali sono le approssimazioni da fare? Come controllare se, trascurando una piccola componente di una forza, si introduce un errore che poi può alterare la validità dei risultati ottenuti?

Si prenda ad esempio la forza gravitazionale, o meglio il campo gravitazionale prodotto dalla Terra: spesso si è soliti approssimare il campo della Terra all'interno del laboratorio come uniforme in direzione e modulo oppure come il campo prodotto da una sfera omogenea di una certa massa, ma è lecito fare tali approssimazioni anche nel nostro esperimento? La precisione richiesta dall'esperimento è tale da non poter sottovalutare nessuno degli errori introdotti con tali approssimazioni. Confrontiamo ad esempio il campo delle accelerazioni generato da una sfera omogenea di massa  $M_{\oplus}$  e di raggio  $R_t$  pari al raggio medio della Terra con un campo uniforme in cui si ha soltanto un'accelerazione costante in direzione e modulo: per due punti  $P$  e  $P'$  a distanza di un metro nel piano orizzontale del laboratorio abbiamo che:



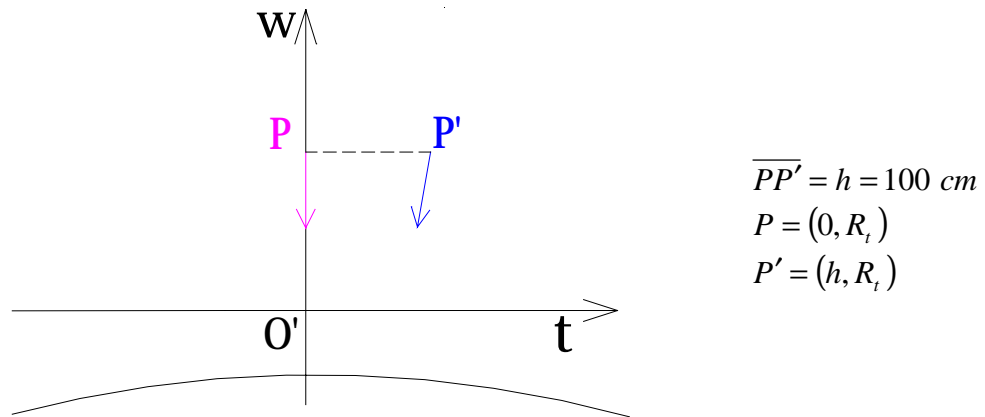


figura 2.4.1: Accelerazioni generate da una massa gravitazionale sferica applicate a due punti nel laboratorio.

Per il campo generato da una sfera:

$$\begin{cases} a_t^{P'} - a_t^P = -\frac{GM_{\oplus} h}{(R_t^2 + h^2)^{3/2}} \\ a_w^{P'} - a_w^P = -\frac{GM_{\oplus} R_t}{(R_t^2 + h^2)^{3/2}} + \frac{GM_{\oplus}}{R_t^2} \end{cases}$$

Dunque, ponendo la forza gravitazionale come una forza costante diretta lungo  $w$  per ogni punto nel laboratorio si trascura un'accelerazione in direzione  $t$  pari a  $1.54137 \cdot 10^{-4} \text{ cm/sec}^2$ .

La figura sottostante mostra il campo delle forze prodotte da una sfera a cui è stato sottratto un campo di accelerazioni uniforme, pari all'accelerazione che si ha nell'origine.

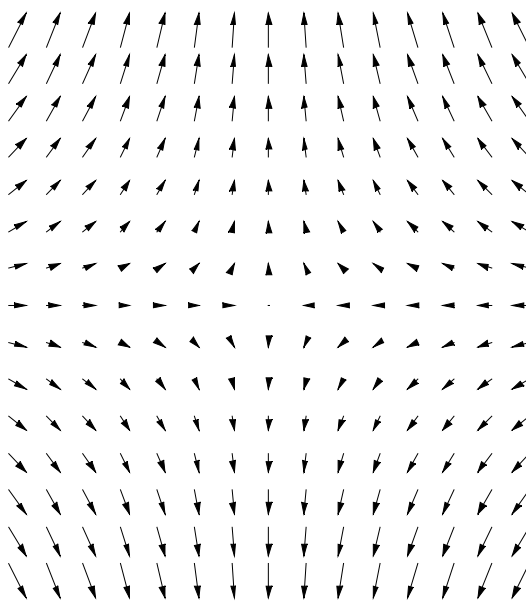


figura 2.4.2: Campo di accelerazioni risultante dal campo generato da una sfera omogenea a cui è stato sottratto un campo di accelerazione uniforme.

Il passo successivo sarà allora decidere se queste accelerazioni, applicate al sistema GGG, producono uno spostamento trascurabile o meno dei centri di massa dei cilindri-test, poiché solo in tal caso l'approssimazione è lecita.

Tuttavia, a questo punto può sorgere una domanda: è ben noto che la Terra non ha la forma di una sfera omogenea ma è piuttosto un ellissoide schiacciato ai poli, e dunque come stabilire se l'approssimazione della Terra a una sfera invece che considerarla un ellissoide è corretta? Il problema di queste "approssimazioni successive" ricorda quello già incontrato in meccanica celeste dove si sviluppava il campo gravitazionale generato dalla Terra in multipoli e si stimava a quale ordine troncare lo sviluppo. In questo caso la situazione è complicata dal fatto che l'esperimento si svolge sulla superficie terrestre, per cui non è possibile fare lo sviluppo del potenziale a grande distanza. Dunque si rende necessario calcolare il campo generato da un ellissoide omogeneo e confrontarlo con quello dovuto a una sfera omogenea in modo da poter stimare l'errore che viene fatto se si introduce questa approssimazione. Di questo ci occuperemo nel prossimo paragrafo: è abbastanza evidente, infatti, che, se vogliamo analizzare teoricamente il moto dei centri di massa dei cilindri-test, non possiamo approssimare il campo gravitazionale come uniforme nel laboratorio, trascurando una accelerazione di  $10^{-4} \text{ cm/sec}^2$ .

## 2.5 Il campo gravitazionale di uno sferoide oblato omogeneo

Consideriamo la Terra come uno sferoide oblato omogeneo in cui:

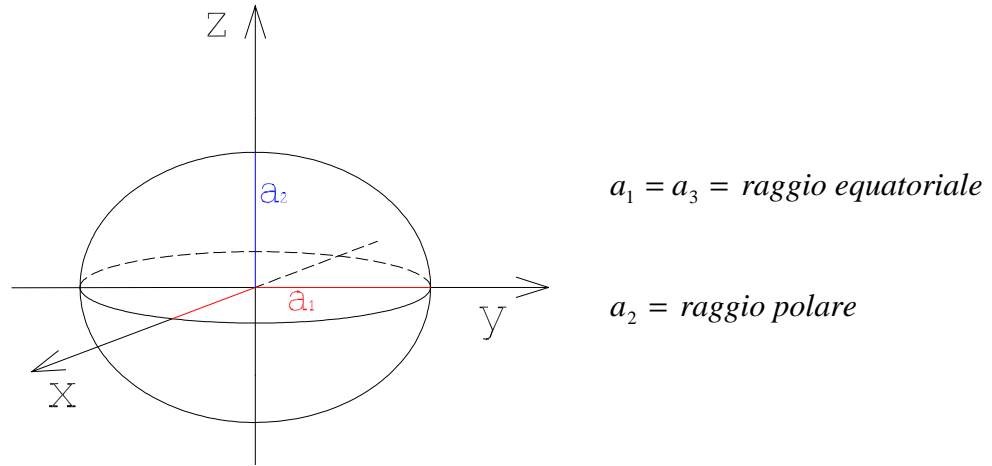


figura 2.5.1: Rappresentazione della Terra come uno sferoide oblato.

La forza gravitazionale dovuta a questo sferoide in un punto  $P$  esterno allo sferoide stesso di coordinate  $P = (x, y, z)$  è data da [Ch]:

$$\begin{aligned}
 F_x &= -2\pi G\rho a_1^2 a_2 x_P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a_1^2 + u)^2 \sqrt{a_2^2 + u}} \\
 F_y &= -2\pi G\rho a_1^2 a_2 y_P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a_1^2 + u)^2 \sqrt{a_2^2 + u}} \\
 F_z &= -2\pi G\rho a_1^2 a_2 z_P \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a_2^2 + u)^{3/2} (a_1^2 + u)}
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

dove  $\lambda$  è la coordinata ellissoidale del punto  $P$ , ovvero il numero che soddisfa la relazione:

$$\frac{x^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{y^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_2^2 + \lambda} = 1 \tag{2.5.2}$$

Poiché il laboratorio in cui si svolge l'esperimento si trova circa a una latitudine  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ , la cosa interessante sarà studiare questo campo all'interno del laboratorio. I sistemi di riferimento considerati questa volta sono:

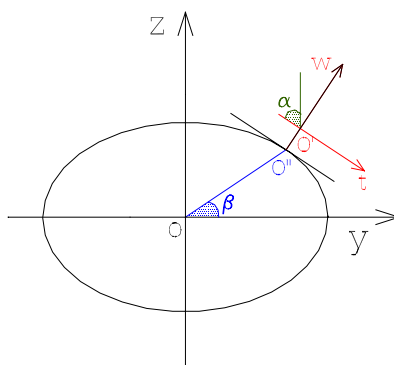


figura 2.5.2: Sistemi di riferimento per il modello della Terra come sferoide.

$(x, y, z)$  è il riferimento solidale alla Terra formato dagli assi principali dello sferoide;

$(s, t, w)$  è il riferimento del laboratorio dove  $(s, t)$  sono le coordinate che giacciono in un piano parallelo al piano orizzontale, la prima verso ovest, e la seconda verso sud.

L'origine  $O'$  del riferimento del laboratorio non si trova sulla superficie dello sferoide ma per comodità è stata presa alla distanza di un metro dal piano orizzontale: questo infatti ci permetterà di prendere l'origine  $O'$  come coincidente con il punto di sospensione del nostro apparato. L'angolo  $\alpha$ , questa volta diverso da  $\beta$ , è la latitudine del laboratorio e nel nostro esperimento sarà appunto  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

Le coordinate dei punti  $O'$  e  $O''$  sono dunque:

$$O'' = \begin{cases} y = \left( \frac{a_1^4 \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{a_2^2 + a_1^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ z = \frac{a_2}{a_1} \sqrt{a_1^2 - y^2} \end{cases} \quad O' = \begin{cases} y = y_{O'} + 100 \cos \alpha \\ z = z_{O'} + 100 \sin \alpha \end{cases} \quad (2.5.3)$$

Per stabilire se è possibile approssimare il campo gravitazionale generato dallo sferoide con quello generato da una sfera, calcoliamo prima come varia nei due casi l'angolo che determina la verticale locale.

Consideriamo quindi una singola massa  $m$  sospesa nel suo centro di massa per un filo inestensibile di lunghezza  $l$ :

$$P = (l \sin \vartheta, -l \cos \vartheta)$$

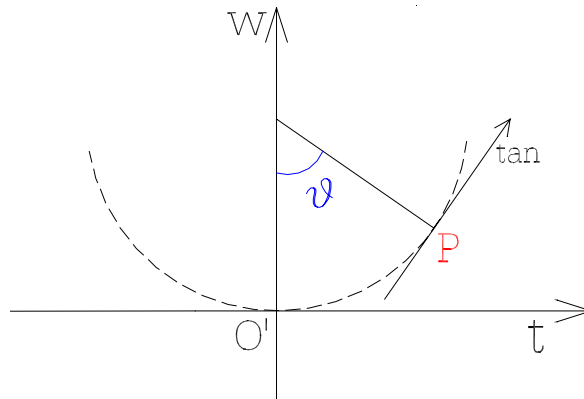


figura 2.5.3: Massa sospesa all'interno del laboratorio.

I due sistemi di riferimento  $(y, z)$  e  $(t, w)$  sono legati dalle relazioni seguenti che ci permetteranno di cambiare sistema di riferimento quando necessario:

$$\begin{cases} t = (y - y_{O'}) \sin \alpha - (z - z_{O'}) \cos \alpha \\ w = (y - y_{O'}) \cos \alpha + (z - z_{O'}) \sin \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} y = t \sin \alpha + w \cos \alpha + y_{O'} \\ z = -t \cos \alpha + w \sin \alpha + z_{O'} \end{cases} \quad (2.5.4)$$

L'angolo  $\vartheta$  della verticale locale è raggiunto per:

$$|F_{ce \tan}| = |F_{g \tan}| \quad \text{con} \quad F_{ce \tan} = \text{forza centrifuga lungo la direzione "tan"} \\ F_{g \tan} = \text{forza gravitazionale lungo la direzione "tan"}$$

ed abbiamo che:

$$F_{g \tan} = F_{gw} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) + F_{gt} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) \quad \begin{array}{l} F_{gt} = F_y \sin \alpha - F_z \cos \alpha \\ F_{gw} = F_y \cos \alpha + F_z \sin \alpha \end{array}$$

e le  $F_y$  e  $F_z$  sono date dalle equazioni (2.5.1) moltiplicate per la massa  $m$ .

Per quanto riguarda la forza centrifuga, invece, avremo che:

$$F_{ce \tan} = m \omega_{\oplus}^2 R \sin(\vartheta + \alpha) \text{ dove } R \text{ è la distanza dall'asse di rotazione, ovvero la coordinata } y \text{ di } P.$$

Il valore numerico così ottenuto per l'angolo  $\vartheta$  è  $\vartheta = 0.00038652$ , che è molto più piccolo del valore ottenuto approssimando il campo come generato da una sfera, che era  $\vartheta = 0.00173281$ .

Dunque per quanto riguarda la verticale locale non è possibile fare questa approssimazione.

Tuttavia il valore della verticale locale mi serve soltanto all'inizio, per stabilire lungo quale direzione si allinea il centro di massa dell'intero sistema, ma più interessante di questo può essere studiare come varia all'interno del laboratorio il gradiente della forza gravitazionale nei due casi. Infatti, la posizione che assume l'apparato e quindi la distanza tra le masse-test, sarà dovuta alle forze che agiscono sull'intero sistema rispetto alla verticale locale. Consideriamo allora la forza gravitazionale prodotta da una massa omogenea di forma sferica (che d'ora in poi indicheremo sempre con  $\vec{F}_G$ ) in un generico punto  $P = (t, w)$  del laboratorio, e la forza gravitazionale prodotta da uno sferoide omogeneo che indicheremo sempre con  $\vec{F}_e$ . Studiando la differenza delle due forze confrontate con i rispettivi valori ottenuti valutandole nell'origine, si ha che  $\vec{F}_{RES} = (\vec{F}_G(P) - \vec{F}_G(O')) - (\vec{F}_e(P) - \vec{F}_e(O'))$  assume, per  $P$  all'interno del laboratorio, cioè per  $t \in [-10, 10]$  e  $w \in [-60, 60]$ , valori che oscillano tra 0 e  $3 \cdot 10^{-7}$ . Disegnando il campo dell'accelerazione corrispondente a  $\vec{F}_{RES}$  si ha:

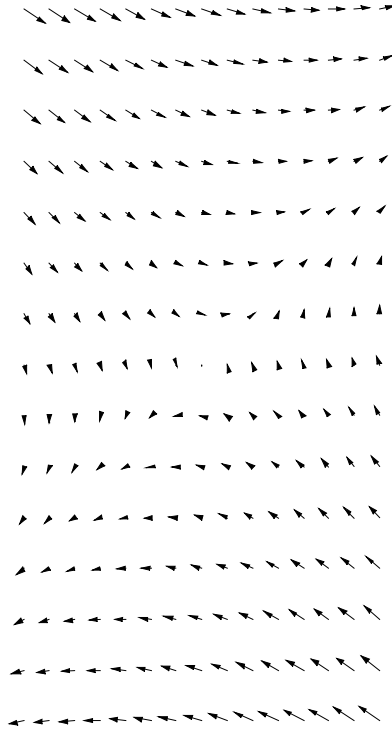


figura 2.5.4: Campo dell'accelerazione corrispondente alla forza residua.

Malgrado il valore della forza residua sia piccolo, poiché l'accelerazione corrispondente che agisce sull'apparato è dell'ordine di  $10^{-9}$  cm/sec<sup>2</sup>, tuttavia la figura del campo mostra chiaramente come, facendo l'approssimazione del campo prodotto da una sfera, si trascuri una forza di componente non nulla nel piano orizzontale, in grado dunque di produrre uno spostamento tra i cilindri-test. Per valutare se questo spostamento prodotto può considerarsi trascurabile o meno, il campo della  $\vec{F}_{RES}$  è stato approssimato con un campo bilineare, cioè tale che su ogni punto agisca una coppia di forze

$$(F_t, F_w) \quad \text{tale che} \quad \begin{cases} F_t = m(k_1 t + k_2 w) \\ F_w = m(k_3 t + k_4 w) \end{cases} \quad (2.5.5)$$

Un'analisi approfondita dell'andamento del campo ha mostrato come, prendendo i valori:

$$\begin{aligned} k_1 &= -1.04469983 \cdot 10^{-9} & k_2 &= 3.16414076 \cdot 10^{-9} \\ k_3 &= 3.09840689 \cdot 10^{-9} & k_4 &= -1.05792377 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

si ottiene un campo che approssima ottimamente il campo mostrato nella [figura 2.5.4](#).

L'ulteriore semplificazione  $k_2 = k_3$ , in modo da avere un campo conservativo, non modifica in maniera sensibile tale risultato. Dunque, rimane da vedere se, introducendo questo campo di correzione, si ha infine uno spostamento tra le masse test.

Per fare questa verifica consideriamo il prototipo GGG schematizzato come descritto nel [paragrafo 2.3](#). I cilindri-test si prendono in questo caso come due sbarrette di lunghezza  $h_1$  e  $h_2$  rispettivamente, e l'asse  $y$  da cui si inizia a contare l'angolo  $\vartheta$  è quello individuato dalla verticale locale, mentre gli assi  $(t, w)$  sono quelli usuali del sistema del laboratorio, cioè il primo sul piano orizzontale e il secondo verso lo zenit. Se immaginiamo il campo centrifugo e gravitazionale come uniformi e consideriamo solo la risultante  $\vec{g}$ , avremo che il braccio di accoppiamento e le sbarrette-test si allineeranno lungo la direzione individuata da  $\vec{g}$ , cioè la verticale locale, e che i relativi centri di massa avranno tutti la stessa componente  $t$ . Ma se adesso introduciamo il potenziale relativo alla forza appena descritta avremo che (l'indice  $s$  è qui usato per la sbarretta di accoppiamento, mentre 1 e 2 si riferiscono alle masse-test):

$$CM_s = \left( -\frac{\Delta L}{2} \sin \vartheta, \frac{\Delta L}{2} \cos \vartheta \right)$$

$$CM_1 = [(L \sin \vartheta + L_1 \sin \vartheta_1), -(L \cos \vartheta + L_1 \cos \vartheta_1)]$$

$$CM_2 = [(L_2 \sin \vartheta_2 - (L + \Delta L) \sin \vartheta), ((L + \Delta L) \cos \vartheta - L_2 \cos \vartheta_2)]$$

Potenziale elastico: 
$$U_{el} = \frac{1}{2} kl^2 (\sin^2 \vartheta + \sin^2 (\vartheta - \vartheta_1) + \sin^2 (\vartheta - \vartheta_2))$$

Potenziale gravitazionale-centrifugo: 
$$U_g = g (my_{CM_s} + m_1 y_{CM_1} + m_2 y_{CM_2})$$

Potenziale del campo residuo: 
$$U_{RES} = U_s + U_1 + U_2$$

dove  $U_i$  è il potenziale  $U_i = \int_{lunghezza} \rho U$  calcolato integrando la densità di massa

$\rho$  e la funzione  $U = -\frac{k_1}{2} t^2 - \frac{k_4}{2} w^2 - k_2 tw$  rispettivamente sulla sbarretta di accoppiamento e sulle sbarrette-test.



Calcolando allora  $U_{TOT} = U_{el} + U_g + U_{RES}$  e risolvendo il sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_{TOT}}{\partial \vartheta} = 0 \\ \frac{\partial U_{TOT}}{\partial \vartheta_1} = 0 \\ \frac{\partial U_{TOT}}{\partial \vartheta_2} = 0 \end{array} \right. \quad \text{si ottengono i valori:} \quad \begin{array}{l} \vartheta = -2.09458 \cdot 10^{-10} \\ \vartheta_1 = -1.12400 \cdot 10^{-10} \\ \vartheta_2 = -6.96938 \cdot 10^{-11} \end{array}$$

che corrispondono ad uno spostamento tra i centri di massa delle sbarrette-test pari a  $\Delta x = |x_{CM_1} - x_{CM_2}| = 5.39993 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$ .

Dunque, l'introduzione di un campo correttivo come quello descritto, fa sì che si trascuri una distanza tra le masse dell'ordine di  $10^{-9} \text{ cm}$ . Questo spostamento è molto piccolo rispetto allo spostamento che viene provocato da altre forze che questo lavoro non prende in esame, come l'effetto giroscopico dovuto alla rotazione dei cilindri-test [GLC] che provoca uno spostamento tra le masse-test dell'ordine di  $10^{-5} \text{ cm}$ , ed è quindi un rumore che si aggiunge agli altri presenti. Inoltre, questo effetto è costante, in quanto la Terra ha sempre la forma di un ellissoide (in realtà, come vedremo nel prossimo capitolo, la Terra si deforma per opera delle maree, ma su questo ritorneremo nel paragrafo 3.4.2) e dunque questo effetto, non essendo periodico, non dovrebbe interferire con l'estrazione del segnale di violazione atteso. Comunque, dato che, approssimando la Terra ad una sfera, si trascura un effetto piuttosto piccolo, in molti casi si è preferito usare questa approssimazione, come nello studio degli effetti giroscopici: infatti simulazioni sperimentali hanno dimostrato che questa approssimazione non comporta un errore rilevante.

Bisogna anche segnalare che quella dello sferoide omogeneo non è la migliore approssimazione che si può fare: il problema del geode, cioè di trovare per la Terra un buon modello che simuli il campo gravitazionale, è un problema molto dibattuto e tuttora affrontato dalla comunità scientifica geofisica. Infatti vengono proposti continuamente nuovi modelli e, per ulteriori informazioni e approssimazioni, si rimanda alle organizzazioni specifiche che trattano questo problema come *National Oceanic and Atmospheric Administration (NOAA)*, o *International Geoid Service (IgeS)* [SMD].

## 2.6 Effetto di una forza uniforme nel laboratorio sull'apparato sperimentale

Nel paragrafo precedente si è visto come considerare il campo gravitazionale come quello generato da una sfera invece che da uno sferoide oblato, equivalga a trascurare una forza che agisce poi sulle masse test provocandone uno spostamento. Tuttavia, se la forza che agisce sulle due masse test è la stessa, si potrebbe pensare, in un primo momento, che anche lo spostamento che provoca sia lo stesso per entrambe le masse, ovvero che non ci sia nessuno spostamento differenziale tra i cilindri-test. Questo in effetti non accade: poiché le masse sono sospese per mezzo di bracci di diversa lunghezza, la geometria del sistema è tale che anche una forza uniforme nel laboratorio provoca uno spostamento differenziale tra le masse test. Per comprendere meglio quanto abbiamo appena detto, presentiamo un esempio molto semplificato di come agisce una forza uniforme e costante nel laboratorio sull'apparato GGG. Come modello matematico, per questo esempio si considera quello più semplice descritto nel [paragrafo 2.3](#) (per i vettori posizione delle varie parti dell'apparato si veda ancora questo paragrafo), in cui le masse test si assumono puntiformi e il braccio di accoppiamento di massa trascurabile. Per quanto riguarda la forza gravitazionale, invece, si considera la forza costante e uniforme nel laboratorio  $\vec{g}$ , poiché in questo contesto interessa fornire soltanto una stima approssimativa dell'effetto preso in esame. La forza "esterna" di cui vogliamo studiare gli effetti, invece, è presa come costante nel laboratorio e ortogonale alla verticale locale.

Dunque, in assenza di questa forza esterna, il sistema si dispone nella posizione di equilibrio lungo la verticale locale (quella individuata dal filo a piombo). Una volta introdotta questa nuova forza, per trovare la nuova posizione di equilibrio del sistema possiamo scrivere la lagrangiana e risolvere il problema secondo la formulazione di Lagrange. Per quanto riguarda le energie potenziali, abbiamo che:

$$U_{k0} = \frac{1}{2} k l^2 \sin^2 \vartheta$$

$$U_{k1} = \frac{1}{2} k l^2 \sin^2 (\vartheta_1 - \vartheta) \quad , \quad U_{k2} = \frac{1}{2} k l^2 \sin^2 (\vartheta_2 - \vartheta) \quad (2.6.1)$$

dove con  $U_{ki}$  ( $i=0,1,2$ ) abbiamo indicato, rispettivamente, l'energia potenziale elastica del braccio di accoppiamento e delle masse test. Per l'energia potenziale gravitazionale, invece, abbiamo:

$$\begin{aligned}
U_g &= -m\vec{g} \cdot \vec{r}_1 - m\vec{g} \cdot \vec{r}_2 \\
&= -mg(L_1 \cos \vartheta_1 + L_2 \cos \vartheta_2 - \Delta L \cos \vartheta)
\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

e infine per l'energia potenziale relativa alla forza eterna di accelerazione  $\vec{a}$ :

$$\begin{aligned}
U_a &= -m\vec{a} \cdot \vec{r}_1 - m\vec{a} \cdot \vec{r}_2 \\
&= ma(L_2 \sin \vartheta_2 - L_1 \sin \vartheta_1 - (2L + \Delta L) \sin \vartheta)
\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

Poiché siamo interessati alle posizioni di equilibrio e non alle equazioni del moto, possiamo aggiungere la condizione che le velocità generalizzate siano nulle. Il sistema da risolvere è allora  $\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0$  dove U è l'energia potenziale totale risultante dalla somma di tutte le energie potenziali prima elencate. Dunque si ha (l'approssimazione di piccoli angoli è lecita in questo contesto perché tanto ci occuperemo sempre di accelerazioni di piccolo modulo):

$$(3k\ell^2 \vartheta - mg\Delta L)\vartheta - k\ell^2(\vartheta_1 + \vartheta_2) - ma(2L + \Delta L) = 0 \tag{2.6.4}$$

$$(mgL_1 + k\ell^2)\vartheta_1 - k\ell^2 \vartheta - maL_1 = 0 \tag{2.6.5}$$

$$(mgL_2 + k\ell^2)\vartheta_2 - k\ell^2 \vartheta + maL_2 = 0 \tag{2.6.6}$$

Questo sistema, costituito da tre equazioni in tre incognite, può essere risolto. La soluzione è:

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= ma \frac{L_1 + L_2 + \frac{L_1}{L_2} \frac{(k\ell^2 - mg\Delta L)(k\ell^2 + mgL_2)}{mgk\ell^2}}{k\ell^2 + mgL_1 + \frac{(k\ell^2 + mgL_2)(k\ell^2 - mg\Delta L)}{mgL_2} \left( 1 + \frac{mgL_1}{k\ell^2} + \frac{mgL_1}{k\ell^2 - mg\Delta L} \right)} \\
\vartheta_2 &= -\frac{k\ell^2 - mg\Delta L}{mgL_2} \left( 1 + \frac{mgL_1}{k\ell^2} + \frac{mgL_1}{k\ell^2 - mg\Delta L} \right) \vartheta_1 + \frac{a}{g} \frac{L_1}{L_2} \frac{k\ell^2 - mg\Delta L}{k\ell^2} \\
\vartheta &= \frac{k\ell^2 + mgL_1}{k\ell^2} \vartheta_1 - \frac{maL_1}{k\ell^2}
\end{aligned} \tag{2.6.7}$$

La distanza differenziale tra le masse test nella nuova posizione di equilibrio può dunque essere calcolata con la formula:

$$\Delta x_{diff} = x_2 - x_1 = -(2L + \Delta L)\vartheta + L_2\vartheta_2 + L_1\vartheta_1 \quad (2.6.8)$$

che, grazie alle (2.6.7), diventa:

$$\Delta x = ma \left[ \frac{L_1}{mg} \left( 1 + \frac{2mgL}{k\ell^2} \right) \right] - ma \left( 3L_1 + 2L \left( 1 + \frac{mgL_1}{k\ell^2} \right) + \frac{k\ell^2}{mg} \right) \frac{L_1 + L_2 + \frac{L_1}{L_2} \frac{(k\ell^2 - mg\Delta L)(k\ell^2 + mgL_2)}{mgk\ell^2}}{k\ell^2 + mgL_1 + \frac{(k\ell^2 + mgL_2)(k\ell^2 - mg\Delta L)}{mgL_2}} \left( 1 + \frac{mgL_1}{k\ell^2} + \frac{mgL_1}{k\ell^2 - mg\Delta L} \right) \quad (2.6.9)$$

La formula (2.6.9) dimostra chiaramente che anche una forza uniforme e costante nel laboratorio produce uno spostamento differenziale tra le masse test. Questo è il motivo importante per cui è necessario considerare l'effetto di forze costanti e uniformi, come ad esempio la forza mareale, di cui parleremo ampiamente in tutto questo lavoro a partire dal prossimo capitolo.

Sommario del Capitolo 2

*Galileo Galilei on The Ground (GGG)*

2.1	Il prototipo a terra: GGG.....	26
2.2	Il segnale di violazione .....	27
2.3	Modellizzazione del prototipo .....	30
2.4	Le forze .....	33
2.5	Il campo gravitazionale di uno sferoide oblato omogeneo .....	36
2.6	Effetto di una forza uniforme nel laboratorio sull'apparato sperimentale .....	43