

Capitolo 3

La forza mareale

3.1 La forza mareale

La forza di marea compare quando si considerano corpi estesi soggetti alle reciproche attrazioni gravitazionali. In genere i sistemi per cui interessa studiare tale forza sono sistemi binari, come ad esempio i sistemi stella-pianeta (Sole-Terra) o pianeta-satellite (Terra-Luna), in cui si considera un corpo esteso che ruota attorno ad un'altra massa gravitazionale. Si prenda ad esempio il sistema Sole-Terra: la Terra compie un moto di rivoluzione attorno al Sole con un periodo di un anno e, se si ragiona in termini del sistema di riferimento solidale alla Terra, l'attrazione gravitazionale viene compensata dalla forza centrifuga (non vogliamo in questo caso entrare nel merito della validità o meno del principio di equivalenza). Tuttavia, se la Terra è vista come un corpo esteso, questo è vero soltanto nel centro di massa del pianeta. Se andiamo a calcolare la risultante delle forze che agiscono su un punto qualunque della superficie terrestre, quale può essere il punto A della *figura 3.1.1*, dobbiamo fare la somma tra la forza gravitazionale in A , $\vec{F}_G(A)$, e la forza centrifuga $\vec{F}_{Ce}(A)$, che, come abbiamo detto, è uguale e opposta alla forza gravitazionale nel centro di massa C .

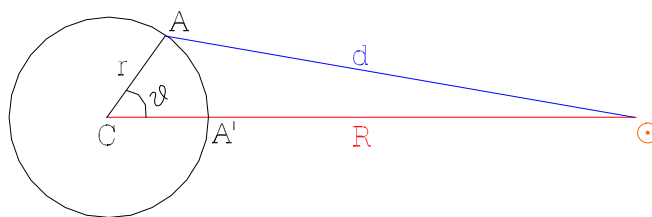


figura 3.1.1: Rappresentazione schematica del sistema Terra-Sole

La forza $\vec{F}_M(A)$, ottenuta da $\vec{F}_M(A) = \vec{F}_G(A) - \vec{F}_{Ce}(C) \neq 0$, prende il nome di *forza mareale*.

Ma come varia il vettore $\vec{F}_M(A)$ in direzione e modulo al variare di A sulla superficie terrestre?

Se consideriamo il piano che passa per il meridiano del punto A e il corpo che provoca la marea (sorgente), risulta chiaro che la forza mareale ha un andamento simmetrico rispetto alla retta che unisce il centro di massa del pianeta e la sorgente, ed è diretta verso la sorgente per tutti i punti che hanno $\vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e diretta nel verso opposto per tutti gli altri punti, come mostrato nella *figura 3.1.2*.

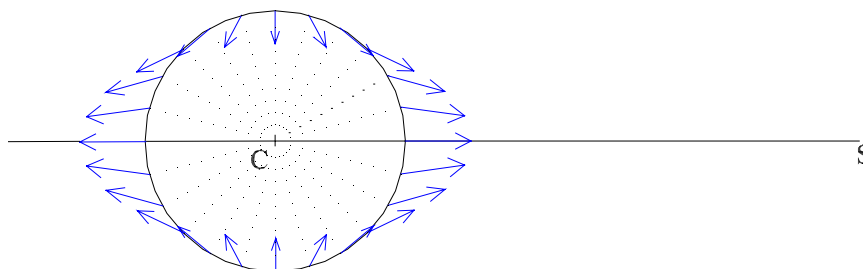


figura 3.1.2: Schema dell'andamento della forza mareale provocata dall'attrazione solare sulla Terra.

Un discorso analogo si può fare anche per il cerchio massimo individuato dall'intersezione della superficie terrestre con il piano dell'eclittica. Rappresentando la forza mareale in un disegno tridimensionale, avremo delle frecce che tendono a formare due lobi lungo la congiungente Terra-Sole: uno rivolto verso la sorgente e uno nel senso opposto.

La prima ovvia conseguenza di questa forza è dunque la deformazione della Terra qualora non si consideri più come un corpo perfettamente rigido: questo aspetto verrà discusso dettagliatamente nel *paragrafo 3.4.1*.

Per stimare numericamente l'intensità dell'accelerazione mareale, invece, possiamo calcolare questa accelerazione nel punto A' , dove le forze centrifuga di rivoluzione e di attrazione gravitazionale hanno la stessa direzione. Per A' abbiamo che:

$$\begin{aligned} |\vec{a}_M(A')| &= \frac{GM}{(R-r)^2} - \frac{GM}{(R)^2} = && \text{(sviluppando per } R \gg r) \\ &\cong \frac{2rGM}{R^3} \end{aligned}$$

dove M è la massa del corpo perturbante e r, R sono le distanze definite nella [figura 3.1.1](#).

Comparata con l'attrazione gravitazionale esercitata dalla Terra:

$$\frac{|\vec{a}_M(A')|}{|\vec{a}_G(A')|} = \frac{2r^3 GM}{R^3 M_\oplus G} = 2 \left(\frac{r}{R} \right)^3 \frac{M}{M_\oplus} \quad (3.1.1)$$

Il sistema solare è un sistema molto complesso, tuttavia, nel caso della Terra, le sorgenti gravitazionali che generano una forza di marea non trascurabile sono soltanto la Luna e il Sole. La Luna, pur avendo una massa molto più piccola rispetto al Sole, esercita una maggiore forza mareale sulla Terra, a causa della sua maggiore vicinanza. Infatti, se consideriamo:

a = raggio della sfera di volume uguale a quello della Terra
 c = valore medio della distanza Terra-corpo perturbante

abbiamo che:

$$\frac{M_{Luna}}{M_{Terra}} \left(\frac{a}{c_{TL}} \right)^3 = 0.5603 \times 10^{-7} \quad (3.1.2)$$

$$\frac{M_{Sole}}{M_{Terra}} \left(\frac{a}{c_{TS}} \right)^3 = 0.2580 \times 10^{-7} \quad (3.1.3)$$

Le attrazioni mareali provocate dal Sole e dalla Luna, perciò, hanno lo stesso ordine di grandezza e in particolare quella dovuta alla Luna è doppia rispetto a quella dovuta al Sole. Tuttavia è chiaro che non sempre i due effetti si sommano, poiché la direzione della forza mareale dipende strettamente dalla posizione che occupa nello spazio il corpo che la provoca. Come mostrato nella [figura 3.1.3](#), gli effetti dovuti al Sole e alla Luna si sommano quando la Luna giace nel piano ortogonale all'eclittica e passante per il Sole e per la Terra stessa, ovvero al novilunio e al plenilunio. Questa osservazione si rivelerà molto utile nel caso del nostro esperimento: infatti, vedremo che il corpo perturbante provoca uno spostamento delle masse test nella stessa direzione dell'accelerazione mareale, e dunque, prolungando le osservazioni per più giorni, sarà sempre possibile distinguere gli effetti dovuti al Sole da quelli dovuti alla Luna osservandoli in relazione alla posizione occupata dalle sorgenti.

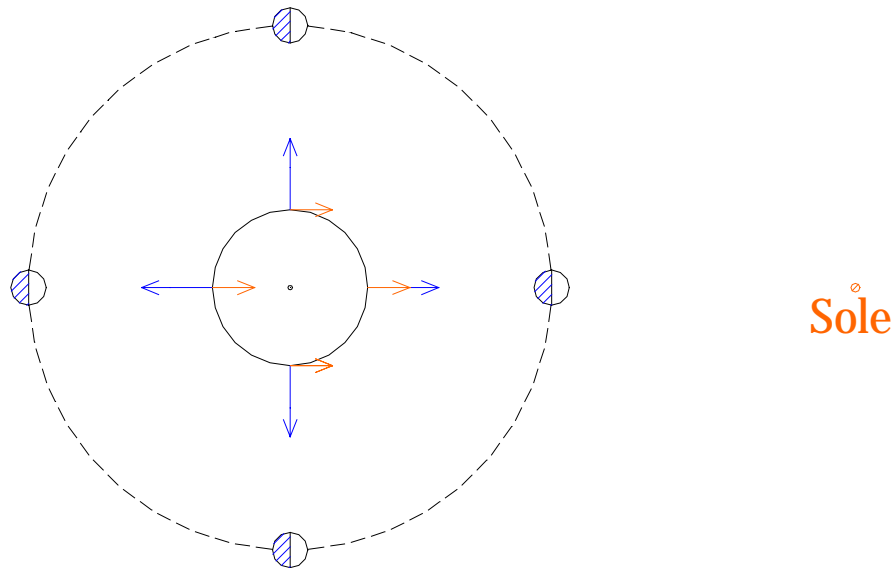


figura 3.1.3: Schema dell'attrazione lunisolare sulla Terra. Le frecce rosse indicano l'attrazione gravitazionale esercitata sulla superficie terrestre dal Sole, mentre quelle blu quella esercitata dalla Luna. Ad esse va quindi sottratta (per ottenere la forza mareale lunisolare) la forza centrifuga.

La forza mareale è comunque una forza piuttosto piccola (una parte su 10^7 l'attrazione terrestre), e agisce in maniera comune su entrambe le masse di prova. È perciò lecito domandare per quale motivo questa forza non possa essere trascurata. Le ragioni di tale scelta sono sostanzialmente due: in primo luogo mostreremo che la forza mareale produce su una singola massa sospesa uno spostamento relativo alla verticale locale non trascurabile. Uno spostamento simile si ha anche tra le masse test dell'apparato considerato, poiché, a causa della geometria del sistema, anche una forza comune produce uno spostamento differenziale tra le masse. Lo spostamento provocato dall'accelerazione mareale, inoltre, varia con il tempo a seconda della posizione del corpo perturbante, dando luogo a un segnale periodico: si presenta il problema di riconoscere e sottrarre il rumore mareale dal segnale di violazione, anch'esso periodico con periodo 24 ore.

In secondo luogo è interessante notare che questa forza produce anche degli *effetti indiretti* di intensità non trascurabile, e questi verranno analizzati nel [paragrafo 3.4.1](#).

3.2 Il potenziale mareale

Dato che la forza mareale è una forza conservativa, risulterà molto utile introdurre il potenziale. In riferimento alla [figura 3.1.1](#), dalla relazione che lega la forza conservativa con il potenziale abbiamo che:

$$W(A) = V(A) + \vec{F}_G(C) \cdot \vec{r} + Cost \quad (3.2.1)$$

dove con $W(A)$ abbiamo indicato il potenziale mareale calcolato nel punto A e con $V(A)$ il suo potenziale gravitazionale.

Poiché $V(A) = -\frac{GM_{Sole}}{d}$, $\vec{F}_G(C) = \frac{GM_{Sole}}{R^3} \vec{R}$ si ha:

$$W(A) = -\frac{GM_{Sole}}{d} + \frac{GM_{Sole}}{R^3} \vec{R} \cdot \vec{r} + Cost \quad \text{e, prendendo come}$$

$Cost = \frac{GM_{Sole}}{R}$, otteniamo:

$$W(A) = -\frac{GM_{Sole}}{R} \left(\frac{R}{d} - \frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} - 1 \right) \quad (3.2.2)$$

Ma dall'analisi sappiamo che possiamo sviluppare:

$$\frac{R}{d} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \vartheta)$$

dove $P_n(\cos \vartheta)$ sono i polinomi di Legendre e sono:

$$P_0(\cos \vartheta) = 1$$

$$P_1(\cos \vartheta) = \cos \vartheta$$

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

e poiché vale $\frac{\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} = \frac{r}{R} \cos \vartheta$ la relazione (3.2.2) diventa:

$$\begin{aligned}
 W(A) &= -\frac{GM_{Sole}}{R} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \vartheta) - \frac{r}{R} \cos \vartheta - 1 \right) = \\
 &= -\frac{GM_{Sole}}{R} \left(1 + \frac{r}{R} \cos \vartheta + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \vartheta) - \frac{r}{R} \cos \vartheta - 1 \right) = \quad (3.2.3) \\
 &= -\frac{GM_{Sole}}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n P_n(\cos \vartheta)
 \end{aligned}$$

Volendoci fermare al primo ordine, dunque, il termine del potenziale mareale che ci interessa è:

$$W_2(A) = -\frac{GM_{Sole}}{2R} \left(\frac{r}{R} \right)^2 (3 \cos^2 \vartheta - 1) \quad (3.2.4)$$

Fino a questo momento, tuttavia, non abbiamo considerato il moto di rotazione della Terra, ma ci siamo limitati ad osservare la sezione lungo il meridiano. Volendo fare uno studio più approfondito, però, è conveniente introdurre la rotazione del pianeta di velocità angolare α_{\oplus} , ed esprimere l'angolo ϑ in funzione delle coordinate convenzionali usate per individuare un punto sulla superficie terrestre.

Ricordando le formule del triangolo sferico, abbiamo:

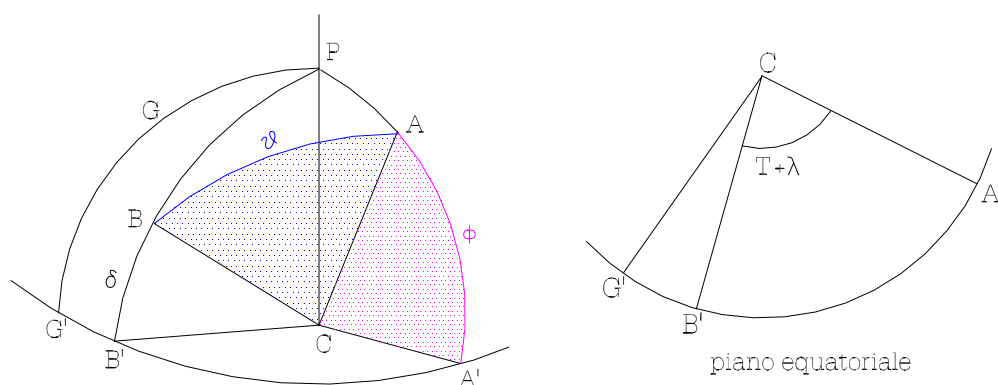


figura 3.2.1: Rappresentazione tridimensionale degli angoli che individuano la posizione della proiezione sulla sfera celeste del laboratorio e del corpo che provoca la marea (a sinistra). Sezione lungo il piano equatoriale (destra)

$$\cos \vartheta = \sin \phi \sin \delta + \cos \phi \cos \delta \cos(T + \lambda)$$

$$P_2(\cos \vartheta) = \frac{1}{4}(3 \sin^2 \phi - 1)(3 \sin^2 \delta - 1) + \frac{3}{4} \sin 2\phi \sin 2\delta \cos(T + \lambda) + \frac{3}{4} \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda)$$

dove ϕ è la latitudine del punto A , δ è la declinazione, e $T + \lambda$ è l'angolo orario del Sole calcolato a partire dal meridiano dell'osservatore in direzione ovest (è stata indicata con λ la longitudine in direzione est del punto A a partire dal meridiano di Greenwich, mentre con T l'angolo orario in direzione ovest).

Tornando allora all'espressione (3.2.4) del potenziale mareale:

$$W_2(A) = -\frac{3GM_s}{4R} \left(\frac{r}{R}\right)^2 \left\{ \begin{array}{ll} 3\left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}\right) + & \text{zonale} \\ + \sin 2\phi \sin 2\delta \cos(T + \lambda) + & \text{tesserale} \\ + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda) & \text{settoriale} \end{array} \right. \quad (3.2.5)$$

In genere si è soliti considerare separatamente i tre termini del potenziale e in letteratura prendono il nome, rispettivamente, di funzioni *zonali*, *tesserali* e *settoriali*. Infatti, essi sono tre tipi di armoniche sferiche del secondo ordine, e il loro comportamento è schematizzato in figura.

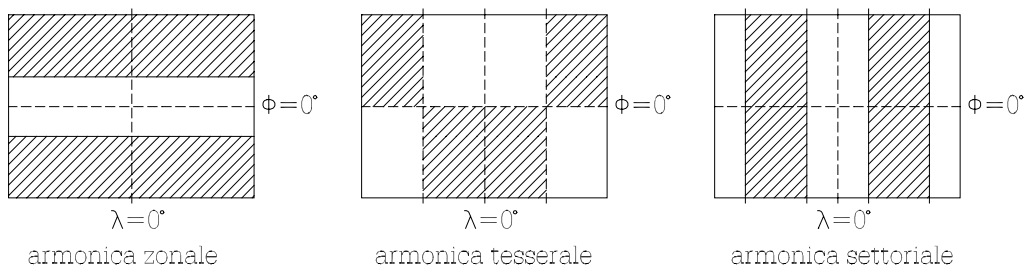


figura 3.2.2: Rappresentazione schematica del comportamento dei tre termini del potenziale mareale. Il disegno mostra l'andamento su 360 gradi.

Il termine settoriale presenta il fattore $\cos 2(T + \lambda)$ e, poiché con l'angolo $(T + \lambda)$ abbiamo indicato la longitudine del Sole ad un dato istante nella

giornata, esso darà luogo a una marea semi-diurna, con periodo dodici ore e ampiezza massima all'equatore quando il corpo perturbante si trova nel piano equatoriale, ovvero con declinazione $\delta = 0$.

Il termine tesserale, invece, ha una dipendenza da $\cos(T + \lambda)$ e divide la sfera in 4 parti in cui cambia segno a seconda della declinazione del corpo perturbante. Le maree corrispondenti sono diurne e l'ampiezza è massima per una latitudine $\frac{\pi}{4}$, quando la declinazione del corpo perturbante è massima (nel caso del Sole si ha $\delta_{\max} = 23^{\circ}27'$).

Per quanto riguarda il termine zonale, esso non dipende in alcun modo dall'angolo $(T + \lambda)$ ma dipende dal quadrato del seno della declinazione del corpo perturbante e dunque il periodo della marea corrispondente sarà di 14 giorni per la luna e di sei mesi se si considera il Sole.

Per capire maggiormente il ruolo di questi tre termini si è soliti introdurre una costante dimensionale, la *costante di Doodson*, comune ai tre termini e che fornisce l'ordine di grandezza del potenziale mareale. Dunque, utilizzando le grandezze definite in precedenza abbiamo che:

$$D = \frac{3 GMa^2}{4 c^3} \quad \text{costante di Doodson}$$

$$W_2^0(A) = -D \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \sin^2 \phi \right) \right] \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 \left(\frac{2}{3} - 2 \sin^2 \delta \right) \right]$$

$$W_2^1(A) = -D \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \sin(2\phi) \right] \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 \sin(2\delta) \cos(T + \lambda) \right]$$

$$W_2^2(A) = -D \left[\left(\frac{r}{a} \right)^2 \cos^2 \phi \right] \left[\left(\frac{c}{R} \right)^3 \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda) \right]$$

$$W_2(A) = W_2^0(A) + W_2^1(A) + W_2^2(A)$$
(3.2.6)

dove abbiamo distinto i tre termini rispettivamente zonale, tesserale e settoriale ed è stata messa in evidenza in ogni singolo fattore una parte

costante (D), una parte che dipende soltanto dalla posizione del punto A nello spazio (prima parentesi), e una terza parte che dipende dal tempo, in particolare dal moto del corpo perturbante rispetto alla Terra (seconda parentesi).

Il valore della costante di Doodson è circa $D_{Luna} = 2.621 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ e $D_{Sole} = 1.207 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-2}$ per il Sole.

Fatta questa breve introduzione, possiamo adesso stimare gli effetti di questi tre termini mareali su un pendolo che si trovi nel campo gravitazionale della Terra perturbato dal Sole e dalla Luna, e calcolare l'effettivo ordine di grandezza della deviazione dalla verticale locale. Prima di affrontare questo problema, tuttavia, è necessario notare che la forza mareale può essere considerata uniforme all'interno del laboratorio e costante per misurazioni di breve durata. Infatti, se si analizzano le equazioni (3.2.6), si può notare che, quando si vanno a scrivere le energie potenziali per due punti P e P' che si trovano a una distanza relativa dell'ordine del metro all'interno del laboratorio, queste equazioni differiscono solo per una piccola variazione dell'angolo ϕ e dell'angolo λ . Possiamo allora immaginare di indicare con ϕ e λ gli angoli relativi al primo punto considerato e con $\phi + \Delta\phi$ e $\lambda + \Delta\lambda$ quelli relativi al secondo punto. Poiché per due punti a una distanza di circa un metro si ha un $\Delta\phi \approx \frac{100 \text{ cm}}{R_{\oplus}} \approx 10^{-7} \text{ rad}$ è lecito fare un'approssimazione per

piccoli angoli e porre $\sin \Delta\phi \approx 2.72 \cdot 10^{-9} \approx 0$, $\cos \Delta\phi \approx 1$. Infatti, come si vedrà più avanti nelle equazioni (3.3.2), nel calcolo della forza mareale la parte trigonometrica viene poi moltiplicata per un fattore $\frac{6GM r}{4R^3} \cong 3.8 \cdot 10^{-5}$.

Fermandosi al primo ordine nello sviluppo del seno, dunque, si trascurano termini dell'ordine di $10^{-14} \text{ cm/sec}^2$. Tuttavia, questa stima è molto più grande del necessario, perché in realtà l'intero apparato raggiunge circa 50 cm in altezza e 35 in larghezza.

Un ragionamento del tutto analogo si può fare anche per l'angolo λ , per cui d'ora in poi considereremo soltanto il primo termine nello sviluppo del seno e del coseno di ϕ e λ . Poiché questi angoli sono presenti nelle equazioni (3.2.6) solo come argomenti di seni e di coseni, è del tutto lecito, allora, approssimare la forza mareale come uniforme all'interno del laboratorio. A titolo di esempio si prenda il termine W_2^1 della (3.2.6) calcolato per il punto P' :

$$W_2^1(A) = -D \left(\left(\frac{r}{a} \right)^2 \text{sen}(2\phi + 2\Delta\phi) \right) \left(\left(\frac{c}{R} \right)^3 \text{sen}(2\delta) \cos(T + \lambda + \Delta\lambda) \right)$$

Dalle formule trigonometriche sappiamo di poter scrivere:

$$\begin{aligned} \text{sen}(2\phi + 2\Delta\phi) &= 2 \text{sen}(\phi + \Delta\phi) \cos(\phi + \Delta\phi) = \\ &= 2 ((\text{sen } \phi \cos \Delta\phi + \cos \phi \text{sen } \Delta\phi) (\cos \phi \cos \Delta\phi - \text{sen } \phi \text{sen } \Delta\phi)) \cong \\ &\cong 2 (\text{sen } \phi \cos \phi) = \text{sen}(2\phi) \end{aligned}$$

In modo del tutto analogo si sviluppa anche il termine in λ :

$$\cos(T + \lambda + \Delta\lambda) = \cos(T + \lambda) \cos(\Delta\lambda) - \text{sen}(T + \lambda) \text{sen}(\Delta\lambda) \cong \cos(T + \lambda)$$

Poiché si può fare la stessa cosa anche per tutti gli altri termini del potenziale, d'ora in poi prenderemo la forza mareale come una forza uniforme all'interno del laboratorio e costante per brevi intervalli di tempo.

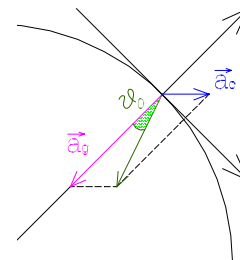
3.3 Effetti della marea su una massa sospesa

Consideriamo dunque una massa m sospesa nel suo centro di massa per mezzo di un filo di massa trascurabile e lunghezza l , e si prenda in esame soltanto la rotazione della Terra e il suo campo gravitazionale.

Scegliendo come sistema di riferimento il sistema non inerziale che ha per assi Z lungo la direzione che unisce il centro della Terra e il laboratorio, X e Y nel piano orizzontale rispettivamente in direzione Nord-Sud e Est-Ovest, avremo che nella posizione di equilibrio, il pendolo si dispone in direzione Nord-Sud formando un angolo con l'asse Z pari a:

$\vartheta_0 \cong 0.00172492$ come risulta dalla formula

$$\text{sen } \vartheta_0 = \frac{\omega_{\oplus}^2 R_{\oplus} \cos \phi \text{sen } \phi}{g} \quad (3.3.1)$$



dove φ è la latitudine del luogo e abbiamo definito $\vec{g} = \frac{M_{\oplus}G}{r^3}\vec{r} + \vec{a}_c$

l'accelerazione locale di gravità. Tale direzione è detta *verticale locale*.

Vogliamo adesso introdurre la perturbazione data da un'altra massa gravitazionale M , come ad esempio può essere il Sole o la Luna. Derivando il potenziale mareale trovato nel paragrafo precedente è dunque possibile ottenere le componenti dell'accelerazione mareale:

$$\begin{aligned}
 a_{mr} &= -\frac{\partial W_{tide}}{\partial r} = \\
 &= \frac{6GMr}{4R^3} \left[3 \left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3} \right) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) + (\sin 2\phi) \sin(2\delta) \cos(T + \lambda) + \cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda) \right] \\
 a_{m\phi} &= -\frac{\partial W_{tide}}{r \partial \phi} = \\
 &= \frac{3GMr}{4R^3} \left[3(\sin 2\phi) \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) + 2(\cos 2\phi) \sin(2\delta) \cos(T + \lambda) - \sin(2\phi) \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda) \right] \\
 a_{m\lambda} &= -\frac{\partial W_{tide}}{r \cos \phi \partial \lambda} = \\
 &= -\frac{3GMr}{4R^3} \left[2(\sin \phi) \sin(2\delta) \sin(T + \lambda) + 2 \cos \phi \cos^2 \delta \sin 2(T + \lambda) \right] \quad (3.3.2)
 \end{aligned}$$

dove a_{mr} è la componente radiale e $a_{m\phi}$ e $a_{m\lambda}$ sono le componenti tangenziali, rispettivamente lungo la direzione N-S e lungo la direzione E-O.

La massa sospesa considerata è soggetta anche alle accelerazioni descritte nelle equazioni (3.3.2) e, proprio a causa di queste accelerazioni, si ha che raggiunge la posizione di equilibrio lungo una direzione diversa da quella della verticale locale precedentemente definita. In particolare, la nuova posizione di equilibrio è funzione del tempo (equilibrio istantaneo del pendolo), e per determinarla è necessario conoscere anche la latitudine dell'osservatorio e la posizione istantanea del corpo perturbante, data sia dall'orario sia dalla declinazione.

Nella *tabella 3.3.1* sono elencate tutte le componenti dell'accelerazione mareale nella loro parte trigonometrica. Per il momento ci limiteremo a considerare le due componenti orizzontali, in modo da analizzare quali siano gli effetti della marea su un corpo libero di muoversi sul piano orizzontale, a diverse latitudini e in funzione del tempo.

Tabella 3.3.1

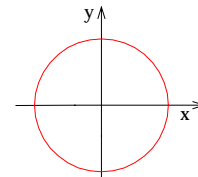
Componente Nord-Sud	Componente Est-Ovest	Componente Radiale	Tipo
$3(\sin 2\phi)\left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}\right)$	0	$3\left(\sin^2 \phi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3}\right)$	zonale
$2(\cos 2\phi)\sin(2\delta)\cos(T + \lambda)$	$-2(\sin \phi)\sin(2\delta)\sin(T + \lambda)$	$(\sin 2\phi)\sin(2\delta)\cos(T + \lambda)$	tesserale
$-\sin(2\phi)\cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda)$	$-2\cos \phi \cos^2 \delta \sin 2(T + \lambda)$	$\cos^2 \phi \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda)$	settoriale

Dalla tabella, appare chiaro che i contributi dell'accelerazione varieranno in funzione della latitudine del laboratorio, del tempo e della declinazione della sorgente al tempo fissato. Ad esempio, al polo $\left(\phi = \frac{\pi}{2}\right)$ si ha:

Contributo tesserale:

$$x = N - S = -2 \sin 2\delta \cos(T + \lambda)$$

$$y = E - O = -2 \sin 2\delta \cos(T + \lambda)$$



Contributo settoriale:

$$x = N - S = 0$$

$$y = E - O = 0$$

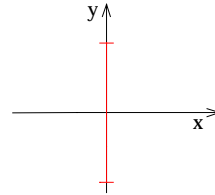
Il termine settoriale, a questa latitudine, risulta nullo, perciò l'accelerazione mareale, che dipende soltanto dall'angolo orario del corpo perturbante rispetto al laboratorio, avrà un periodo di 24 ore. Questa, però, è una caratteristica

propria soltanto del polo. Alla latitudine che ci interessa, cioè $\phi = \frac{\pi}{4}$, avremo questo andamento:

Contributo tesserale:

$$x = N - S = 0$$

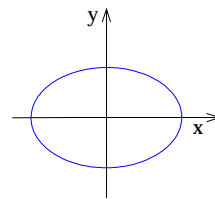
$$y = E - O = \sqrt{2} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen}(T + \lambda)$$



Contributo settoriale:

$$x = N - S = \cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda)$$

$$y = E - O = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos^2 \delta \operatorname{sen} 2(T + \lambda)$$



La posizione di equilibrio del pendolo in funzione del tempo, proiettata sul piano orizzontale, è individuata, istante per istante, dalle componenti:

$$x = -\cos^2 \delta \cos 2(T + \lambda)$$

$$y = -\sqrt{2} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{sen}(T + \lambda)$$
(3.3.3)

La dipendenza dal tempo è diversa nelle due componenti x e y ed è presente sia nell'angolo orario $T + \lambda$, sia nella declinazione δ . La funzione che lega questi angoli al tempo sarà analizzata a lungo nel prossimo capitolo, tuttavia, poiché al momento ci interessa fornire un'idea di come varia l'aspetto del segnale mareale a seconda del periodo dell'anno in cui si svolgono le misure, riportiamo nelle figure 3.3.1 e 3.3.2 alcuni esempi in cui si è preso $T + \lambda = a_{\oplus} t$.

Nei grafici il tempo varia tra zero e ventiquattro ore e la declinazione è nulla nel primo, mentre nel secondo è massima.

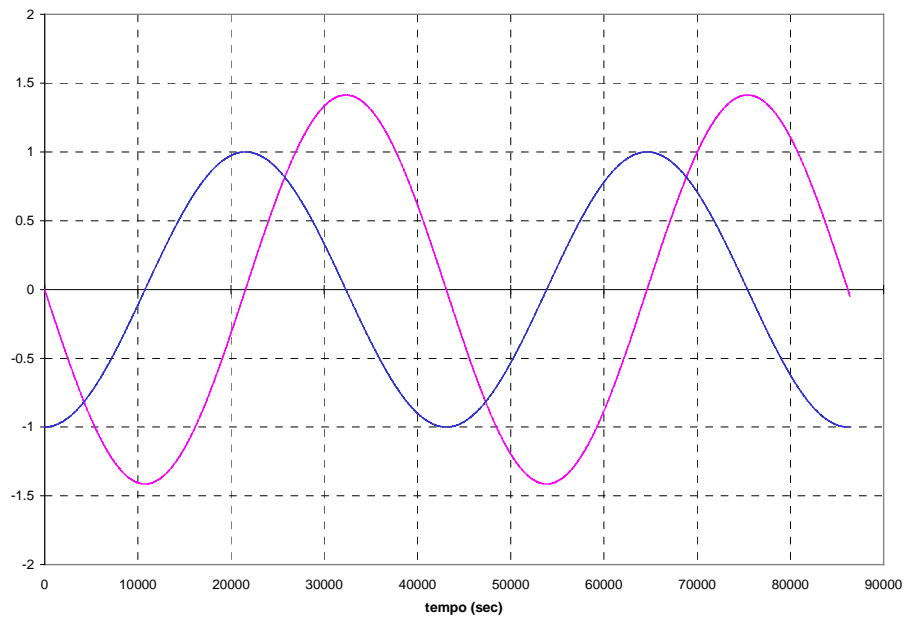


figura 3.3.1: Andamento nel tempo della componente est-ovest (colore magenta) e della componente nord-sud (colore blu) per $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\delta = 0$.

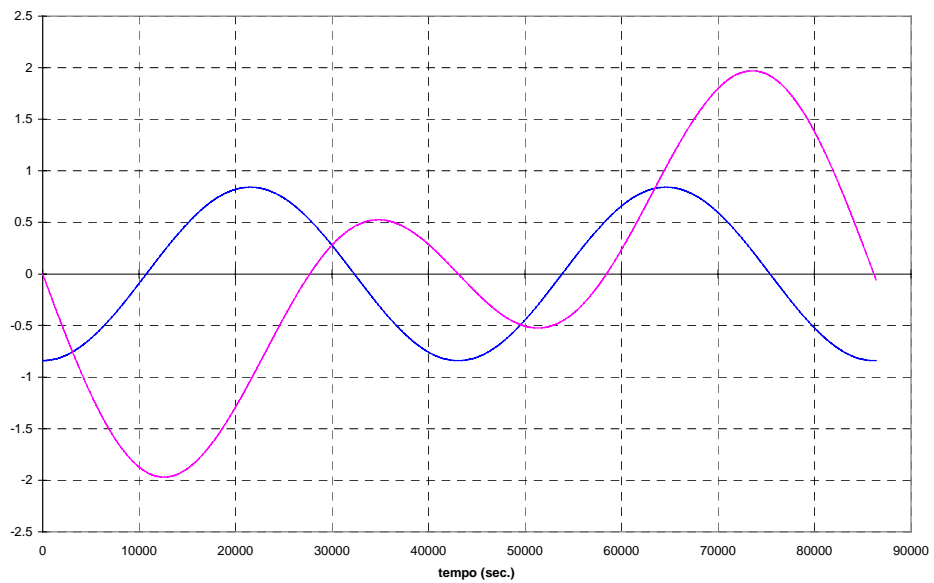


figura 3.3.2: Andamento nel tempo della componente est-ovest (colore magenta) e della componente nord-sud (colore blu) per $\phi = \frac{\pi}{4}$ e $\delta_{\max} \approx 23^\circ.5$.

Dato che l'andamento in funzione del tempo delle due componenti varia molto a seconda della declinazione delta, anche la figura descritta sul piano orizzontale dalla posizione di equilibrio del pendolo nell'arco di un giorno sarà diversa a seconda del periodo dell'anno in cui si svolgono le osservazioni. Infatti, alla latitudine di 45° , il pendolo descriverà un'ellisse quando $\delta = 0$ e una particolare linea con un cappio quando δ è massimo ($\delta_{\max} \approx 23^\circ.5$).

Risolvendo in formulazione lagrangiana il problema di un pendolo sferico soggetto alla forza gravitazionale, a quella centrifuga e a quella mareale e calcolando le posizioni di equilibrio istantaneo, è stato possibile stabilire anche il valore numerico della deviazione dalla verticale "imperturbata", che rimane dell'ordine di $3.9 \times 10^{-8} \text{ rad}$.

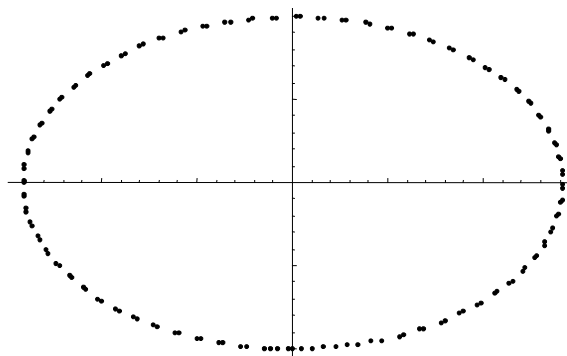


figura 3.3.3: Figura descritta sul piano orizzontale dalla posizione di equilibrio del pendolo nell'arco di un giorno. In questo caso si è scelto $\delta = 0$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$.

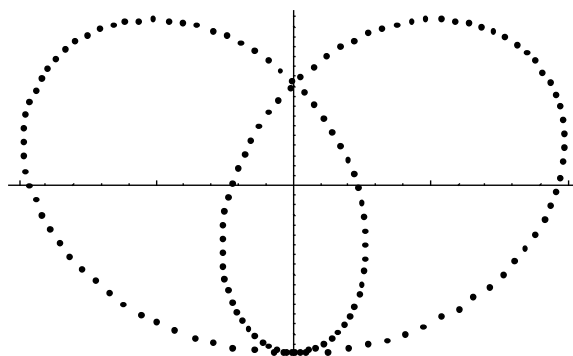


figura 3.3.4: Figura descritta sul piano orizzontale dalla posizione di equilibrio del pendolo nell'arco di un giorno per $\delta_{\max} \approx 23^\circ.5$ e $\phi = \frac{\pi}{4}$.

3.4 Effetti della marea su GGG

Dopo aver studiato l'effetto della forza di marea su una singola massa sospesa per il suo centro di massa, passiamo adesso a considerare come agisce tale forza su un modello che rappresenti più fedelmente il prototipo GGG. Nel corso di questo paragrafo e dei successivi faremo sempre riferimento alla schematizzazione fatta per GGG descritta nel *capitolo 2*. Per lo studio delle maree sull'apparato sarà necessario tener conto di un aspetto importante, cioè:

- ❖ gli effetti indiretti della marea sull'apparato;
- ❖ la sovrapposizione del segnale mareale con quello di violazione;

Il primo di questi problemi è un aspetto che non deve essere trascurato, poiché le maree producono effetti sensibili e macroscopici sulla Terra, nella variazione della sua forma geometrica e nella variazione del campo gravitazionale, come ci accorgiamo quotidianamente. Tuttavia in questo contesto vedremo che per questo problema possiamo operare attivamente in modo da poter annullare questi effetti secondari.

Per quanto riguarda la sovrapposizione del segnale, invece, il problema è molto più complesso, e ad esso dedicheremo grande spazio nel corso di questo e del prossimo capitolo.

3.4.1 Effetti indiretti

La forza mareale produce anche un effetto, che abbiamo chiamato *indiretto*, deformando la geometria della Terra. Questa deformazione è quella che comunemente viene associata al fenomeno dell'alta e bassa marea e consiste di un innalzamento o abbassamento del livello del mare (marea oceanica) o del livello terrestre (marea terrestre) qualora non si consideri più la Terra perfettamente rigida. Per ricavare l'altezza della marea e darne una stima approssimativa, assumeremo che l'acqua degli oceani sia in equilibrio statico. Poiché la superficie terrestre deve essere equipotenziale, dall'equazione (3.2.4) e dal potenziale terrestre (che in questo caso assumeremo essere mgh , dove h è l'altezza al di sopra della superficie iniziale) abbiamo:

$$gh - \frac{GM(R+h)^2}{r_0^3} \left(\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} \right) = \text{costante} \quad (3.4.1.1)$$

o, sviluppando per $h \ll r_0$ e trascurando i termini di ordine superiore:

$$gh - \frac{GMR^2}{r_0^3} \left(\frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right) = \text{costante} \quad (3.4.1.2)$$

Da questa equazione, che ci fornisce h in funzione dell'angolo θ è chiaro che le alte maree si verificano per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, mentre le basse per $\theta = \frac{\pi}{2}$.

L'intervallo di marea, cioè la differenza tra alta e bassa marea, sarà dunque:

$$\Delta h = \frac{GMR^2}{gr_0^3} \left[\frac{3\cos^2 \theta - 1}{2} \right]_{\theta=\frac{\pi}{2}}^{\theta=0} \quad (3.4.1.3)$$

Il valore numerico di Δh calcolato per la Luna e per il Sole è, rispettivamente, circa 53 cm e 26 cm , e quindi può arrivare, se si considerano gli effetti combinati del Sole e della Luna, come già visto nel [paragrafo 3.1](#), fino a 73 cm .

Tuttavia, i dati qui riportati sono solo indicativi ma non sono precisi poiché la superficie non raggiunge un equilibrio statico in presenza di forze mareali. Se si vuol fare un calcolo accurato, ad esempio della marea oceanica, bisogna valutare la risposta dell'acqua ad una forza di oscillazione con periodo di 12 ore e 25 minuti, dovuta alla rotazione della Terra attorno al proprio asse (la Luna assume la stessa posizione rispetto a un dato meridiano dopo 12 ore e 25 minuti). Infatti, l'acqua nei bacini oceanici ha periodi di oscillazione naturale ben determinati e quindi è necessario risolvere il problema di un oscillatore soggetto ad una forzante periodica. La risposta dell'oscillatore dipende in maniera critica dal rapporto tra la frequenza delle forze di spostamento e la frequenza naturale: è chiaro, dunque, che se la frequenza naturale è molto più grande di quella delle forze di spostamento, allora le oscillazioni rimangono in fase con la forza di spostamento; se invece la frequenza naturale risulta essere più piccola (e questo è il caso di alcuni bacini oceanici), si ha una marea in senso inverso, fuori fase rispetto alla forza di spostamento. Inoltre, si hanno talvolta anche dei bacini la cui frequenza naturale è molto vicina a quella di spostamento, e quindi possono sviluppare enormi maree per risonanza: questo è il caso della baia di Fundy, in cui le maree fanno registrare fino a 15 metri di dislivello.

Questa deformazione della Terra, comunque, anche quando non si considerano situazioni particolari come quella appena descritta, produce sull'apparato un effetto indiretto di tilt del terreno a cui bisogna prestare molta attenzione.

Infatti, la situazione si schematizza facilmente se si considera un vettore che si trova in una direzione fissa rispetto al terreno e solidale con esso (come può essere ad esempio l'asse del motore): questo vettore si sposterà di un angolo γ rispetto alla direzione iniziale man mano che la Terra si deforma per opera delle maree, come mostrato in *figura 3.4.1.1*.

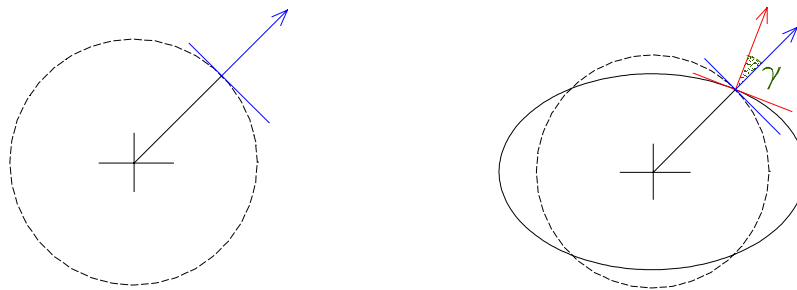


figura 3.4.1.1: Effetto di tilt del terreno causato dalla deformazione della Terra per opera delle maree.

Per eliminare questo effetto di *tilt del terreno* sul prototipo GGG si pensa di introdurre una debole sospensione cardanica, per mezzo della quale l'apparato risulterà essere sufficientemente disaccoppiato da terra.

Inoltre, volendo fare un modello molto accurato del campo gravitazionale terrestre, si dovrebbe tener conto anche della variazione che subisce il campo gravitazionale quando si considera la terra con una diversa geometria, cioè deformata dalle maree. In realtà, questo è un problema che va affrontato soltanto se si vuol ottenere la stima precisa del campo gravitazionale terrestre. Nel *paragrafo 2.4*, tuttavia, avevamo già visto che la variazione del campo gravitazionale è piccola anche quando si va a considerare la deformazione ellittica, per cui questo effetto risulterà molto piccolo, perché è una perturbazione di ordine superiore. Per una trattazione più esaustiva, comunque, si rimanda agli studi condotti sul geode dall'International Geoid Service [SMD].

3.4.2 Effetti diretti: studio e analisi dei vari siti possibili

Poiché è stata scelta come sorgente per gli esperimenti a Terra il Sole, l'eventuale segnale di violazione del principio di equivalenza dipenderà strettamente dalla posizione del Sole rispetto al laboratorio e dunque avrà periodo pari al tempo che impiega il Sole a tornare nella stessa posizione rispetto al laboratorio, circa 24 ore. La modulazione del segnale, come abbiamo già detto, è un grande vantaggio poiché ci permette di escludere tutti i segnali che hanno diverso periodo da quello che stiamo cercando. Ma, da quanto emerso nel [paragrafo 3.2](#), si ha anche un'altra forza che produce un segnale con periodo 24 ore, la componente tesserale della marea: come possiamo dunque estrarre il segnale del Principio di Equivalenza dal segnale mareale che è parecchi ordini di grandezza più grande?

Inoltre si presenta anche un altro problema: la componente zonale della marea ha un periodo di sei mesi e dunque, per misurazioni di periodi brevi, può essere difficilmente individuata ed eliminata.

Ma torniamo ancora una volta alla [tabella 3.3.1](#): la prima cosa interessante che possiamo notare è che il termine zonale si annulla in direzione Est-Ovest. Per poter rendere nullo anche il termine tesserale, allora, è necessario che sia $\sin \varphi = 0$ ($\varphi = 0$) oppure $\sin(2\delta) = 0$.

Dunque le scelte che abbiamo sono: fare l'esperimento all'equatore oppure aspettare il giorno dell'equinozio, in cui il Sole si trova sul piano orbitale e $\delta = 0$. Eppure, dato che si ha la funzione $\sin(2\delta)$ e la funzione seno è una funzione dispari, si può pensare anche di fare le misure nei giorni precedenti e in quelli successivi l'equinozio e poi sommare i risultati in modo che, passando da $\sin(-2\delta) = -\sin(2\delta)$ a $\sin(2\delta)$ gli effetti del termine tesserale si annullino reciprocamente.

Purtroppo questo metodo, come vedremo più avanti, non è attuabile, in quanto le variabili δ e l'angolo orario $(T + \lambda)$ sono affette da varie perturbazioni, come la retrocessione dei nodi, il moto del perielio, ecc., e la loro dipendenza dal tempo è molto più complessa di quanto può sembrare in prima analisi.

Se consideriamo, invece, la componente Nord-Sud abbiamo che il termine tesserale si annulla quando $\cos(2\varphi) = 0$ cioè $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Questo è in effetti molto

più vicino alla realtà (Firenze si trova circa ad una latitudine di 42°), ma di quanto ci possiamo allontanare dalla latitudine $\phi = \frac{\pi}{4}$?

L'accelerazione mareale, per non interferire con il segnale, deve essere più piccola di quella del segnale di violazione. Tuttavia, in questo caso abbiamo che la componente zonale non si annulla, ma anzi è massima: per poter fare delle buone misure, allora, è necessario che queste si protraggano per molti giorni, in modo da poter riconoscere ed eliminare la componente zonale che sporca il segnale.

Sommario del Capitolo 3

La forza mareale

3.1 La forza mareale	46
3.2 Il potenziale mareale	50
3.3 Effetti della marea su una massa sospesa	55
3.4 Effetti della marea su GGG	61
3.4.1 Effetti indiretti	61
3.4.2 Effetti diretti: studio e analisi dei vari siti possibili	64