

## Capitolo 4

### *Applicazioni al prototipo GGG: problemi e soluzioni relative agli effetti mareali*

#### 4.1 Analisi armonica del potenziale mareale

Per quanto abbiamo visto nel capitolo precedente, ciascun fattore del potenziale mareale  $W_2$  (equazione 3.2.5) contiene un termine che dipende dalla posizione che occupa il corpo perturbante rispetto alla Terra. Questo termine, che nelle equazioni (3.2.6) era stato messo in evidenza con la seconda parentesi e che d'ora in poi chiameremo "termine astronomico", contiene alcuni elementi periodici  $\delta$ ,  $R$ ,  $\cos s(T + \lambda)$ , dove  $s$  può assumere i valori 0, 1, 2 a seconda del termine  $W_2^s$  del potenziale che si sta considerando,  $\delta$  è la declinazione del corpo,  $R$  la sua distanza dalla Terra e  $(T + \lambda)$  è la sua longitudine rispetto al laboratorio.

Il valore numerico di questi elementi, come abbiamo già visto, varia nel tempo, ma qual è la sua esplicita dipendenza dal tempo, cioè come si possono scrivere  $\delta$ ,  $R$ ,  $\cos s(T + \lambda)$  in funzione di  $t$ ?

La risposta a questa domanda non è così semplice come può apparire in un primo momento perché sono tanti i moti di cui dovremo tener conto nell'esplicitare la dipendenza dal tempo.

Facciamo un esempio: dalla seconda legge di Keplero sappiamo che l'orbita terrestre è un'ellisse in cui il Sole occupa uno dei due fuochi e quindi  $R$ , la distanza Terra-Sole, varia durante l'anno man mano che la Terra percorre la sua orbita. D'altra parte, dalla meccanica celeste, sappiamo anche che la linea degli apsidi, cioè la linea che unisce il perielio e l'afelio, non è fissa nel tempo, ma compie anch'essa una rotazione e dunque, nello studio di  $R(t)$  si dovrà tener presente anche questo movimento. Nello stesso modo, nel considerare la declinazione dovremo tener conto anche del movimento della linea dei nodi. Dunque, nello studio del potenziale mareale compariranno tutti quegli effetti legati al problema dei tre corpi Sole-Terra-Luna.

Per poter trovare una funzione del tempo che approssimi l'andamento reale di  $\delta$ ,  $R$ ,  $\cos(T + \lambda)$ , si possono introdurre le *variabili di Doodson* [Me] [MMo] e cercare di sviluppare gli elementi che compaiono nel potenziale mareale nei termini di queste variabili. Le variabili di Doodson sono:

- $\tau$  = tempo medio lunare
- $s = L(M)$  = longitudine media della Luna
- $h = L(S)$  = longitudine media del Sole
- $p = L(P_M)$  = longitudine media del perigeo della Luna
- $N' = -\Omega$  = longitudine media negativa del nodo ascendente della Luna
- $p_s = L(P_S)$  = longitudine media del perielio

Nella figura sottostante si mostra come si calcolano le principali grandezze astronomiche sul piano dell'eclittica.

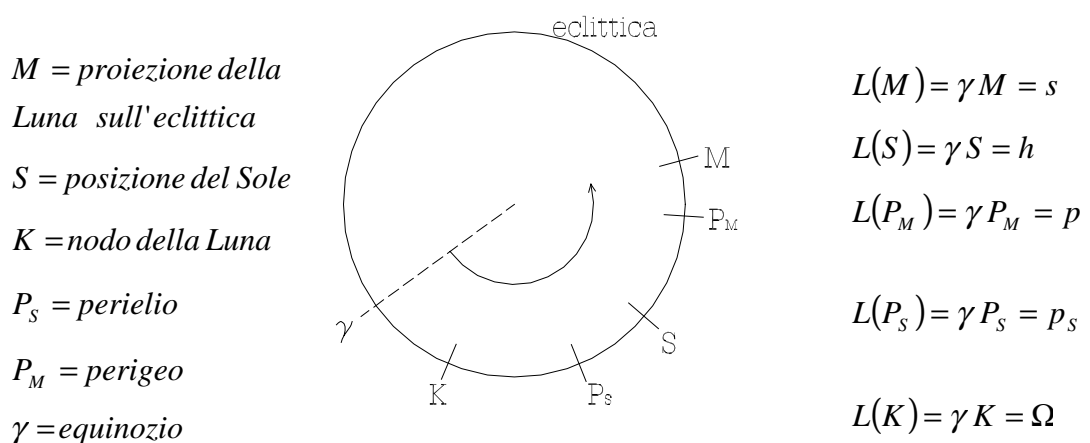


figura 4.1.1: Schema delle variabili di Doodson

Si noti che di queste variabili cinque sono riferite alla Luna e al Sole e una, il tempo medio  $\tau$ , alla posizione dell'osservatore. Inoltre, molte sono riferite alla Luna: nello studio delle maree sulla Terra, del resto, l'influenza della Luna, a causa della sua maggiore vicinanza, è circa doppia rispetto a quella del Sole. Nel corso di questo capitolo, comunque, ritorneremo spesso su come sia possibile, talvolta, distinguere il segnale dovuto alla Luna o quello dovuto al Sole.

Ciascuna di queste variabili ha la forma

$$w_r = \mu_r t + v_r \quad (r=1,2,\dots,6) \quad (4.1.1)$$

e ogni variabile può essere considerata una funzione lineare del tempo: i termini periodici non ci sono perché le  $w_r$  sono variabili medie e i termini quadratici in  $t$  o di ordine superiore sono molto piccoli e possono essere per il momento trascurati.

Inoltre, le variabili sono state scelte in modo che le frequenze corrispondenti  $\dot{w}_r = \frac{dw_r}{dt} = \mu_r$  siano tutte positive e questo è il motivo per cui si è presa la longitudine media negativa per il nodo ascendente della Luna. Sono anche state ordinate in modo che risulti:

$$\dot{\tau} > \dot{s} > \dot{h} > \dot{p} > \dot{N}' > \dot{p}_s.$$

I periodi corrispondenti, espressi in *giorni solari medi*  $d$ , sono noti con grande precisione e sono riportati nella tabella sottostante.

Tabella 4.1.1: *Periodi corrispondenti alle frequenze delle variabili di Doodson*

$2\pi\dot{\tau}^{-1}$	periodo medio della rotazione della Terra relativa alla Luna . 1 giorno lunare = 1.03505 $d$
$2\pi\dot{s}^{-1}$	periodo medio del moto orbitale della Luna 1 mese lunare = 27.32158 $d$
$2\pi\dot{h}^{-1}$	periodo medio del moto orbitale del Sole 1 anno
$2\pi\dot{p}^{-1}$	periodo medio del perigeo lunare 8.85 anni
$2\pi(\dot{N}')^{-1}$	periodo medio della regressione del nodo lunare 18.61 anni
$2\pi\dot{p}_s^{-1}$	periodo del perielio 20940 anni

A questo punto, possiamo analizzare il potenziale mareale e cercare di scriverlo in funzione di questi nuovi elementi. Nel *capitolo 3* avevamo già visto che il potenziale mareale poteva essere spezzato in tre parti che avevamo chiamato *zonale, tesserale e settoriale* a seconda della dipendenza da  $T$ .

Supponiamo adesso di prendere la Luna come corpo perturbante e consideriamo l'espressione del potenziale mareale (3.2.6). Per sviluppare i termini astronomici dei tre contributi abbiamo bisogno di scrivere in funzione delle variabili di Doodson le quantità:

$$\frac{c}{R}, \cos^2 \delta, \sin 2\delta, \cos(T + \lambda) \text{ e } \cos 2(T + \lambda).$$

Per prima cosa ci occuperemo del termine  $\frac{c}{R}$ .

Consideriamo l'equazione dell'orbita:

$$R = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\dot{s} - \dot{p})t} \quad (4.1.2)$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore dell'orbita ed  $e$  è l'eccentricità.

Poiché l'eccentricità dell'orbita lunare è:

$$e = 0.0549489 \quad (4.1.3)$$

è possibile trascurare i termini in  $e^2$  e, dalla relazione che lega il semiasse maggiore con la distanza media Terra-Luna<sup>1</sup>, l'equazione (4.1.2) si può scrivere come:

$$R = c(1 - e \cos(\dot{s} - \dot{p})t) \quad (4.1.4)$$

cioè

$$\frac{c}{R} = 1 + e \cos(\dot{s} - \dot{p})t \quad (4.1.5)$$

---

<sup>1</sup> Questa relazione è:  $c = \sqrt{ab}$  dove  $b$  è il semiasse minore. Poiché  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  si ha  $c = a\sqrt[4]{1 - e^2} \approx a$ , fermandosi al primo ordine nello sviluppo dell'eccentricità si può considerare il raggio medio dell'orbita terrestre uguale al suo semiasse maggiore.

La seconda legge di Keplero, invece, afferma che la velocità areolare rimane costante, cioè:

$$\frac{1}{2} \dot{s} R^2 = \text{costante} = \frac{1}{2} \dot{s}_0 c^2 \quad (4.1.6)$$

dove  $\dot{s}_0$  è la velocità angolare media corrispondente alla distanza  $c$ .

Quindi, elevando al quadrato la (4.1.4) e sostituendola nella (4.1.6), si ha:

$$\dot{s} c^2 [1 - 2e \cos(\dot{s} - \dot{p})t] = \dot{s}_0 c^2 \quad (4.1.7)$$

e

$$\dot{s} = \dot{s}_0 (1 + 2e \cos(\dot{s} - \dot{p})t) \quad (4.1.8)$$

La longitudine vera della Luna all'istante  $t$  è dunque:

$$l = \int_0^t \dot{s} dt = \dot{s}_0 t + \left( \frac{2e \dot{s}_0}{\dot{s} - \dot{p}} \right) \text{sen}(\dot{s} - \dot{p})t \quad (4.1.9)$$

che diventa:

$$l = \dot{s}_0 t + 0.1108099 \text{sen}(\dot{s} - \dot{p})t \quad (4.1.10)$$

espresso in radianti.

Tuttavia, in questo ragionamento, abbiamo considerato  $\frac{c}{R}$  come influenzato soltanto dalle variabili  $\dot{s} - \dot{p}$ , cioè dal termine che in letteratura prende il nome di *ellepticity*. Con un ragionamento analogo a quello appena visto, potremmo considerare anche la dipendenza da  $(\dot{s} - 2\dot{h} + \dot{p})$  o anche da  $(2\dot{s} - 2\dot{h})$  e in questo caso avremmo:

$$\frac{c}{R} = 1 + \underbrace{0.0549 \cos(\dot{s} - \dot{p})}_{\text{ellepticity}} + \underbrace{0.010 \cos(\dot{s} - 2\dot{h} + \dot{p})}_{\text{evection}} t + \underbrace{0.008 \cos(2\dot{s} - 2\dot{h})}_{\text{variation}} t \quad (4.1.11)$$

Per lo studio che faremo in questo capitolo, vedremo che sarà sufficiente fermarsi al termine dell'ellitticità.

Per quanto riguarda i termini in delta, possiamo ricordare le formule del triangolo sferico. Dal teorema dei seni, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varepsilon \sin l = 0.39798 \sin l \\ \sin^2 \delta &= 0.079196(1 - \cos 2l) \end{aligned} \quad (4.1.12)$$

dunque:

$$\begin{aligned} \cos^2 \delta &= 0.92080 + 0.079196 \cos 2s t + \dots \\ \sin 2\delta &= 2 \sin \delta \cos \delta = 0.76379 \sin s t + \dots \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

Ragionando in questo modo, è possibile fare lo stesso sviluppo anche per i termini che riguardano il Sole: le variabili da usare, in questo caso, non saranno più  $p$  e  $s$ , ma  $h$  e  $p_s$ .

Chiarita dunque la dipendenza dalle variabili di Doodson, possiamo finalmente passare a considerare i singoli termini del potenziale mareale.

#### 4.2 Il termine tesserale

Poiché, come abbiamo visto ampiamente nel *capitolo 3*, ciò che ci interessa maggiormente è lo studio di segnali con periodo 24 ore che possono sporcare l'eventuale segnale di violazione atteso, ci occuperemo per prima cosa dello studio del termine tesserale.

Prendiamo adesso l'espressione (3.2.6) del termine tesserale  $W_2^1$  del potenziale :

$$W_2^1(A) = D \left( \left( \frac{r}{a} \right)^2 \sin(2\phi) \right) \left( \left( \frac{c}{R} \right)^3 \sin(2\delta) \cos(T + \lambda) \right) \quad (4.3.1)$$

Come abbiamo già notato nel *capitolo 3*, il termine tesserale si annulla quando la declinazione del corpo perturbante è zero. Se la declinazione delta è diversa da zero, invece, è possibile scrivere la formula (4.1.12) per il  $\sin 2\delta$ .

Poiché  $T + \lambda = \dot{\tau} t$ , dalla (4.3.1) abbiamo che l'espressione del termine tesserale per la Luna diventa:

$$- D \sin \varphi [1 + 0.1647 \cos(\dot{s} - \dot{p})t + \dots] (0 + 0.76379 \sin \dot{s} t + \dots) \cos \dot{\tau} t \quad (4.3.2)$$

e quindi si può scrivere:

$$- D \operatorname{sen} \phi \left( O_1 + Q_1 + M_1 + \pi_1 + P_1 + S_1 + m_{K_1} + s_{K_1} + \psi_1 + \phi_1 + J_1 + OO_1 + \dots \right) \quad (4.3.3)$$

cioè come una somma di funzioni periodiche, di periodo e ampiezza diverse tra loro, il cui argomento è appunto una combinazione delle variabili di Doodson. Queste funzioni, che qui abbiamo distinto con i nomi che si trovano in letteratura [Me] [Pla], hanno tutte periodo attorno alle 24 ore, e verranno analizzate in dettaglio nel prossimo paragrafo.

L'idea che sta alla base di questo metodo, comunque, è quella di sviluppare ciascun fattore che dipende dal tempo in una serie trigonometrica:

$$\sum_j C_j \cos(\sigma_j t + s\lambda + \theta_j) \quad (4.3.4)$$

dove  $C_j$  è un coefficiente di ampiezza e l'argomento del coseno dipende linearmente dal tempo solare medio  $t$  calcolato a partire da Greenwich, dalla longitudine  $\lambda$ , e dalla velocità  $c$  definita come una combinazione lineare della velocità  $a$  di rotazione della Terra e delle principali velocità legate al moto della Terra e della Luna:

$$\sigma = s\omega + \sum_{k=1}^5 m_k \omega_k \quad (4.3.5)$$

dove gli  $a_k$  rappresentano le velocità corrispondenti alle cinque variabili di Doodson che dipendono dal Sole o dalla Luna.

L'approssimazione dell'andamento del potenziale mareale in funzione del tempo sarà migliore a seconda di quanti termini si considerano nella serie trigonometrica, e il coefficiente  $C$  ci dirà quanto ciascun termine incide sull'approssimazione fatta. Nel passaggio dall'equazione (4.3.2) alla (4.3.4) abbiamo detto solo implicitamente a quale termine ci siamo fermati nello sviluppo della serie trigonometrica, dicendo invece dove abbiamo troncato lo sviluppo di  $\frac{c}{R}$  e  $\operatorname{sen} \delta$ . Troncare lo sviluppo come abbiamo fatto corrisponde all'aver considerato nella serie (4.3.4) solo i termini che hanno un coefficiente  $C > 0.001 D$ , dove è stata presa come unità di misura la costante di Doodson  $D = 2.627723 \text{ m}^2/\text{sec}^2$ .

#### 4.2.1 Le principali onde mareali con periodo 24 ore

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, è possibile esprimere la componente mareale a 24 ore in una somma di onde di diversa ampiezza e periodo. Se consideriamo l'espressione (4.3.2) e sviluppiamo i prodotti, abbiamo che:

$$- D \operatorname{sen} \varphi (0.76379 \cos \dot{\tau} \operatorname{sen} \dot{s}t + 0.12579 \cos (\dot{s} - \dot{p})t \operatorname{sen} \dot{s}t \cos \dot{\tau}t) \quad (4.2.1.1)$$

Dalla (4.2.1.1) e dalle formule trigonometriche per i prodotti di seni e coseni<sup>2</sup>, abbiamo che gli argomenti delle onde principali risultanti sono:

- $\dot{\tau} + \dot{s}$  che corrisponde a un'onda di periodo 23h 56m 4s. In letteratura quest'onda viene indicata con  $m_{K_1}$ ;
- $\dot{\tau} - \dot{s}$  onda  $O_1$ , di periodo 25h 49m 10s;
- $(\dot{\tau} + \dot{s}) + (\dot{s} - \dot{p})$  onda  $J_1$ , di periodo 23h 5m 54s;
- $(\dot{\tau} + \dot{s}) - (\dot{s} - \dot{p})$  onda  $M_1$ ;
- $(\dot{\tau} - \dot{s}) - (\dot{s} - \dot{p})$  onda  $Q_1$ , di periodo 26h 52m 6s;

Se ci fermiamo a termini di ordine successivo nello sviluppo dei fattori  $\frac{c}{R}$  e  $\operatorname{sen} \epsilon$ , vediamo comparire anche altre onde, tutte di periodo attorno alle 24 ore.

Inoltre, un ragionamento del tutto simile a questo si può fare per i termini che dipendono dalla posizione del Sole. In questo modo, si può arrivare a scrivere una tabella delle principali onde mareali a 24 ore, ricordando che il numero delle onde presenti dipende da quale precisione vogliamo nell'approssimazione.

---

<sup>2</sup> Le formule trigonometriche a cui si fa riferimento sono:

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (\alpha + \beta) - \operatorname{sen} (\alpha - \beta)] \quad \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} (\alpha + \beta) + \operatorname{sen} (\alpha - \beta)]$$



Tabella 4.2.1.1 (da [MMo, pag 28])

Simbolo	Argomento	Ampiezza ( $m^2/sec^2$ )	Sorgente
$Q_1$	$(\tau - s) - (s - p)$	0.126	Luna
$O_1$	$\tau - s$	0.660	Luna
$M_1$	$(\tau + s) - (s - p)$	-0.052	Luna
$\pi_1$	$(t - h) - (h - p_s)$	0.018	Sole
$P_1$	$(t - h)$	0.308	Sole
$S_1$	$(t + h) - (h - p_s)$	-0.007	Sole
$m_{K_1}$	$\tau + s$	-0.635	Luna
$s_{K_1}$	$t + h$	-0.295	Sole
$\psi_1$	$(t + h) + (h - p_s)$	-0.007	Sole
$\phi_1$	$t + 3h$	-0.013	Sole
$J_1$	$(\tau + s) + (s - p)$	-0.052	Luna
$OO_1$	$\tau + 3s$	-0.028	Luna

Si noti che le onde  $m_{K_1}$  e  $s_{K_1}$  hanno lo stesso argomento, poiché:

$$\tau + s = t + h = \text{tempo siderale} .$$

Molto spesso, quindi, queste due vengono riunite in una soltanto, di periodo 23h 56m 4s (un giorno siderale), che viene indicata con  $K_1$ .

È interessante notare anche il fatto che quasi tutte queste onde hanno più o meno ampiezza comparabile. Questo significa che ai fini del nostro esperimento non è possibile trascurare qualcuno di questi contributi, perché tutti potrebbero dare origine a un segnale di periodo molto vicino a 24 ore e che, quindi, potrebbe essere confuso con il segnale di violazione. Lo scopo di questi paragrafi dedicati allo sviluppo armonico del potenziale mareale è appunto quello di mostrare come risulti complicata un'analisi teorica e come sia necessario, per l'esperimento GGG, ricorrere a teorie planetarie complesse che tengano conto di ogni singolo effetto perturbativo.

### 4.3 Gli altri termini del potenziale mareale

Un'analisi simile a quella appena fatta per il termine tesserale, può essere applicata anche a tutti gli altri termini del potenziale mareale.

Se consideriamo l'espressione (3.2.6) dei termini  $W_2^2$  e  $W_2^0$  del potenziale, abbiamo delle espressioni che, ancora una volta, dipendono dalla declinazione del corpo perturbante, dalla sua distanza dalla Terra e dall'angolo orario che tale corpo ha rispetto all'osservatore. Nel caso del termine settoriale, l'unica differenza si ha nella dipendenza dall'angolo orario, che compare moltiplicato per due, mentre nel caso del termine zonale manca la dipendenza da questo angolo.

In questo paragrafo non ci dilungheremo su come sia possibile ottenere le principali onde con periodo 12 ore e a lungo periodo, poiché ciò che interessa maggiormente in questo lavoro è lo studio di rumori che possono disturbare la misura del segnale di violazione del principio di equivalenza, con periodo, cioè, 24 ore. Tuttavia, è evidente che, sviluppando le equazioni (3.2.6) nei termini delle variabili di Doodson e ragionando in maniera del tutto analoga al paragrafo precedente, è possibile distinguere onde di diversa ampiezza e frequenza. Per completezza, riportiamo in tabella le principali onde a lungo periodo e quelle che formano la componente semidiurna.

Tabella 4.2.1.2 (da [MMo, pag28])

Simbolo	Argomento	Ampiezza ( $m^2/sec^2$ )	Sorgente
Componente a lungo periodo			
$M_0$	0	-1.326	Luna
$S_0$	0	-0.615	Sole
$S_a$	$h - p_s$	-0.031	Sole
$Ss_a$	$2h$	-0.191	Sole
$M_m$	$s - p$	-0.217	Luna
$M_f$	$2s$	-0.411	Luna
Componente semidiurna			
$2N_2$	$2\tau - 2(s - p)$	0.020	Luna
$\mu_2$	$2\tau - 2(s - h)$	0.024	Luna
$N_2$	$2\tau - (s - p)$	0.152	Luna

$v_2$	$2\tau - (s - 2h + p)$	0.029	Luna
$M_2$	$2\tau$	0.795	Luna
$\lambda_2$	$2\tau + (s - 2h + p)$	-0.006	Luna
$L_2$	$2\tau + (s - p)$	-0.022	Luna
$T_2$	$2t - (h - p_s)$	0.022	Sole
$S_2$	$2t$	0.370	Sole
$R_2$	$2t + (h - p_s)$	-0.003	Sole
$m_{K_2}$	$2(\tau + s)$	0.069	Luna
$s_{K_2}$	$2(t + h)$	0.032	Sole

#### 4.4 Interpretazione dei dati in GGG

Da quanto abbiamo visto nei *paragrafi 4.2 e 4.3*, l'interpretazione dei dati raccolti nell'esperimento a terra si presenta piuttosto complicata. Infatti, l'accelerazione mareale che agisce sulle masse test varia nel tempo e, di conseguenza, varierà con lo stesso periodo anche lo spostamento differenziale dei due cilindri test, che è ciò che viene rilevato dagli strumenti (si veda a questo proposito il *paragrafo 2.2*).

Tuttavia, la prima importante osservazione che possiamo fare è che il nostro strumento per misurare le distanze (il ponte capacitivo) ci permette di distinguere lo spostamento differenziale lungo due direzioni diverse e ortogonali fra loro. Questo rende possibile scomporre nelle due componenti orizzontali l'accelerazione che provoca lo spostamento delle masse test, e ci permette di riconoscere la sorgente gravitazionale che provoca quell'accelerazione. Infatti, il periodo di rivoluzione della Luna è piuttosto basso (un mese circa) e, prolungando le misurazioni per più giorni, è possibile distinguere l'accelerazione dovuta alla Luna proprio studiandone la variazione in direzione.

Il problema più grosso, invece, è costituito dai termini mareali dovuti al Sole. Poiché il segnale di violazione e la marea solare hanno la stessa sorgente, dipenderanno entrambi dalle stesse variabili, sebbene tale dipendenza possa essere diversa. Nel *paragrafo 2.2* avevamo già visto quale deve essere il segnale di violazione atteso e, dalla formula:

$$\vec{a}_{EP} = \vec{a}^B - \vec{a}^A = \eta \frac{GM_{Sole} \vec{R}}{R^3}$$

appare evidente che il segnale di violazione sarà in stretta competizione con il segnale mareale, poiché per il vettore  $\vec{R}$ , che rappresenta la posizione del centro di massa dei cilindri rispetto al Sole, possiamo applicare lo stesso ragionamento e gli stessi sviluppi usati nel [paragrafo 4.2](#). Infatti, se scriviamo il vettore  $\vec{R}$  in funzione del vettore posizione del Sole e di quello che individua il laboratorio nel sistema geocentrico convenzionale, avremo che:

$$\begin{aligned}\vec{R}_{Sole} &= R_{TS} (\cos \delta \cos H, \cos \delta \sin H, \sin \delta) \\ \vec{R}_{Lab} &= (R_{\oplus} \cos \phi, 0, R_{\oplus} \sin \phi) \\ \vec{R} = (R_x, R_y, R_z) &= \vec{R}_{Sole} - \vec{R}_{Lab} = R_{TS} (\cos \delta \cos H - R_{\oplus} \cos \phi, \cos \delta \sin H, \sin \delta - R_{\oplus} \sin \phi)\end{aligned}\quad (4.4.1)$$

dove  $\delta$  e  $H$  sono, rispettivamente, la declinazione del Sole e il suo angolo orario rispetto al meridiano del laboratorio. Nel sistema di riferimento del laboratorio, dunque, dove  $X$  è nella direzione Nord-Sud e  $Y$  in quella Est-Ovest, il vettore  $\vec{R}$  si può scrivere:

$$\vec{R} = (R_x \sin \phi - R_z \cos \phi, R_y, R_z \sin \phi + R_x \cos \phi) \quad (4.4.2)$$

e le componenti dell'accelerazione differenziale possono essere espresse mediante:

$$\begin{aligned}a_{NS}^{EP} &= \frac{GM_{Sole}}{R^3} (R_x \sin \phi - R_z \cos \phi) \\ a_{EO}^{EP} &= \frac{GM_{Sole} \eta}{R^3} R_y\end{aligned}\quad (4.4.3)$$

La dipendenza dagli elementi solari nella (4.4.3), così come l'analogia con l'espressione ottenuta per l'accelerazione mareale, è evidente.

Tuttavia, lo studio delle effemeridi dei pianeti e, in particolare, la posizione della Terra rispetto al Sole, è da sempre al centro della ricerca astronomica, e, nel corso del tempo, sono stati presentati molti modelli e algoritmi per ottenere le effemeridi planetarie con estrema precisione. Attualmente, abbiamo a disposizione molte teorie planetarie per calcolare la posizione geometrica dei pianeti, come VSOP82 ([Bre82]), DE200/LE200 ([Sta82],[Sta90b]), DE403/LE403 ([SNWF95]) o VSOP87 ([BF88]). Tra queste, le prime due vengono in genere utilizzate per il calcolo delle effemeridi dei pianeti interni, mentre le altre sono usate per i pianeti esterni. Per i pianeti interni la

precisione che si raggiunge nel calcolo delle effemeridi è davvero notevole ed è compresa tra qualche decina di mas ( $1 \text{ mas} = 10^{-3}$  secondi d'arco) e qualche mas per la longitudine e la latitudine eclittica, e circa  $10^{-8}$  ua ( $1 \text{ ua} = 1.495985 \cdot 10^{13} \text{ cm}$ ) per quanto riguarda il raggio vettore. La precisione interna per queste teorie è dell'ordine delle decine di mas.

Una buona strategia per estrarre il segnale di violazione da quello mareale, allora, potrebbe essere quella di utilizzare durante le misure un segnale mareale di riferimento, calcolato teoricamente e di sottrarre ai dati raccolti sperimentalmente il segnale calcolato per via teorica.

Per realizzare questo studio sono stati utilizzati dei dati forniti dal *Serveur d'éphémérides du Bureau des longitudes* [BdL], un'organizzazione francese che si occupa di raccogliere le varie teorie planetarie e di fornire le effemeridi dei pianeti e degli asteroidi del sistema solare una volta scelto il sistema di riferimento e il periodo che interessa.

I dati raccolti per questo lavoro sfruttano l'algoritmo proposto da Kaplan *et al.* ([KHSS]), e si riferiscono alla posizione apparente del Sole e della Luna in vari periodi dell'anno per un laboratorio che, nel nostro caso, si trova a

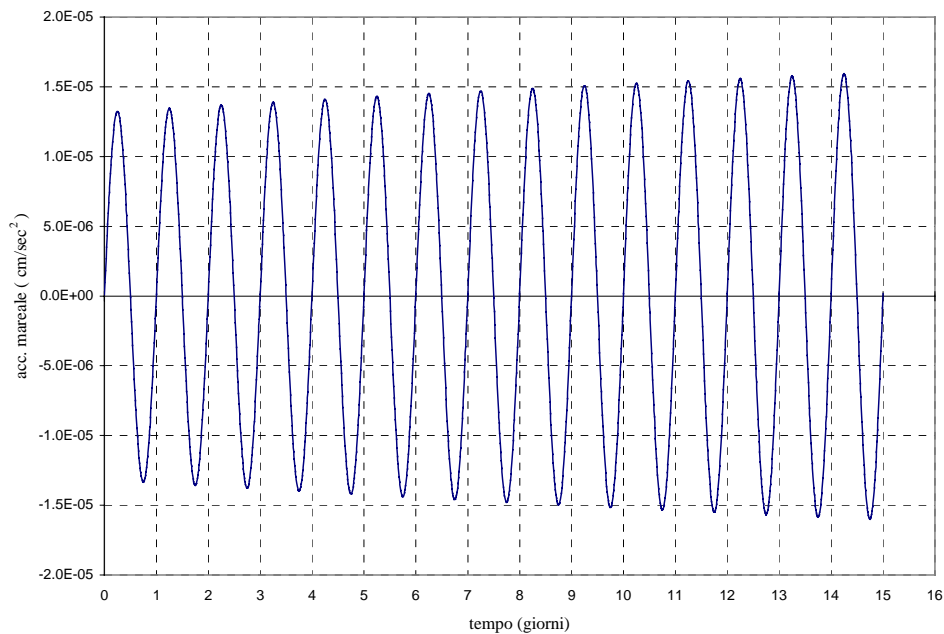
latitudine Nord  $\phi = \frac{\pi}{4}$ . Per semplicità, la longitudine del laboratorio è stata

presa uguale a zero (ciò equivale a considerare un laboratorio che si trova sul meridiano di Greenwich), poiché la longitudine  $\lambda$  entra in gioco soltanto nell'angolo orario  $H = T + \lambda$  del corpo perturbante rispetto all'osservatore, e dunque l'effetto che produce una longitudine  $\lambda \neq 0$  su un grafico è soltanto una differenza di fase.

Il programma fornito dal *Bureau des longitudes* permette di calcolare la declinazione, l'ascensione retta e la distanza Terra-Corpo per uno o più elementi del sistema solare ad un dato istante. Utilizzando poi le formule già viste nei paragrafi precedenti per l'accelerazione tesserale mareale in direzione Nord-Sud e Est-Ovest (3.3.2) e le formule per l'accelerazione differenziale di violazione attesa (4.4.3), è stato possibile realizzare dei grafici che mostrino quale segnale ci aspettiamo dall'analisi sperimentale. Le sorgenti gravitazionali considerate sono la Luna e il Sole e di esse si studia l'effetto nella direzione Est-Ovest, poiché è quella in cui si annulla il termine zonale della marea. Nei grafici qui riportati, si mette a confronto l'accelerazione provocata dal corpo perturbante all'interno del laboratorio (sull'apparato), con l'accelerazione dovuta all'eventuale violazione differenziale. Dunque, l'accelerazione mareale è quella dei modi comuni, cioè quella che agisce su entrambe le masse test allo stesso modo. Ma, come abbiamo visto nel

*paragrafo 2.6*, una forza comune non viene rigettata completamente dall'apparato ma, a causa della geometria del sistema, provoca uno spostamento differenziale tra le masse, cioè un'accelerazione differenziale residua tra i cilindri. Tuttavia, ragionando come nel *paragrafo 2.6*, si può dimostrare [GLC] che questa accelerazione differenziale ha lo stesso andamento dell'accelerazione comune ma è circa tre ordini di grandezza più piccola. Nelle simulazioni svolte in questo lavoro, comunque, si è preferito fare riferimento all'accelerazione dei modi comuni, che è quella effettivamente calcolata. Una volta nota questa accelerazione, infatti, per ottenere lo spostamento differenziale tra le masse test si tratta di risolvere un sistema lagrangiano come quello mostrato nel *paragrafo 2.6*.

Nei primi due grafici (*figura 4.4.1* e *figura 4.4.2*) è rappresentata l'accelerazione mareale nella direzione E-O calcolata nel mese di maggio a confronto con il segnale di violazione che ci aspettiamo nello stesso periodo.



*figura 4.4.1: Componente E-O della marea solare nei primi 15 giorni del mese di Maggio (modi comuni)*

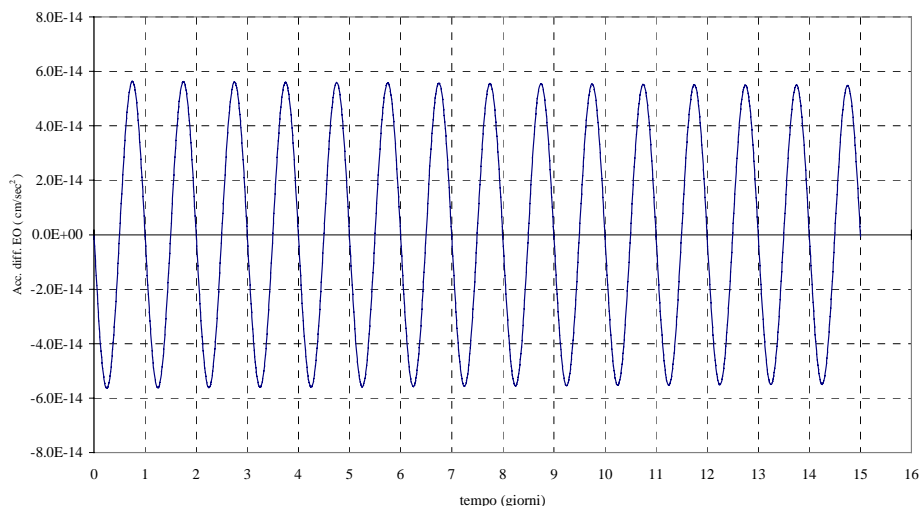


figura 4.4.2: Accelerazione differenziale E-O (con sorgente il Sole) per la violazione del PE attesa nei primi 15 giorni di Maggio

Si noti che nel primo grafico l'ampiezza del segnale aumenta, mentre nel secondo diminuisce. Questo è dovuto alla diversa dipendenza delle accelerazioni dall'angolo delta: infatti, mentre l'accelerazione mareale dipende da  $\sin(2\delta)$ , l'accelerazione differenziale attesa per la violazione del PE contiene il  $\cos \delta$ . Poiché con delta abbiamo indicato la declinazione del Sole, questa durante l'anno varia nell'intervallo  $(-23^\circ, 23^\circ)$ , per cui l'andamento delle funzioni trigonometriche risulta essere quello mostrato nella figura 4.4.3.

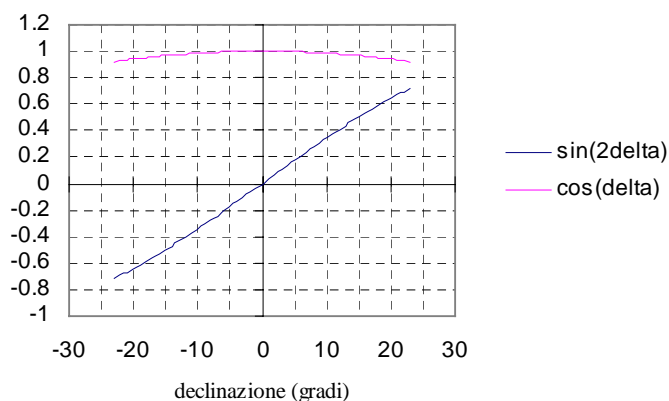


figura 4.4.3: Andamento delle componenti trigonometriche presenti nelle accelerazioni in funzione della declinazione solare delta.

La figura 4.4.3 evidenzia l'importanza di osservare le due accelerazioni nell'intorno di  $\delta = 0$ , cioè in prossimità dell'equinozio.

In questo caso, infatti, si ha che l'accelerazione differenziale, che dipende dal coseno della declinazione, avrà un andamento piuttosto simmetrico. Se andiamo ad analizzare i dati raccolti per 20 giorni attorno all'equinozio del 21 Marzo 2000, infatti, avremo che l'accelerazione differenziale nella direzione Est-Ovest rimane di ampiezza praticamente costante, mentre la marea subisce forti oscillazioni simmetriche rispetto alla declinazione zero. Questo comportamento, che è mostrato nelle figure [4.4.4](#) e [4.4.5](#), può essere molto utile ai fini del nostro esperimento: infatti, nei giorni vicini all'equinozio l'effetto mareale a 24 ore dovuto al Sole sarà quasi nullo e, con l'aiuto di questo grafico, potremo dire esattamente in quali momenti i nostri strumenti rivelano soltanto il segnale di PE. Tuttavia, questo discorso non tiene conto della perturbazione mareale dovuta alla Luna: sarà quindi interessante, e lo vedremo più avanti, vedere qual è l'effetto combinato della marea lunisolare.



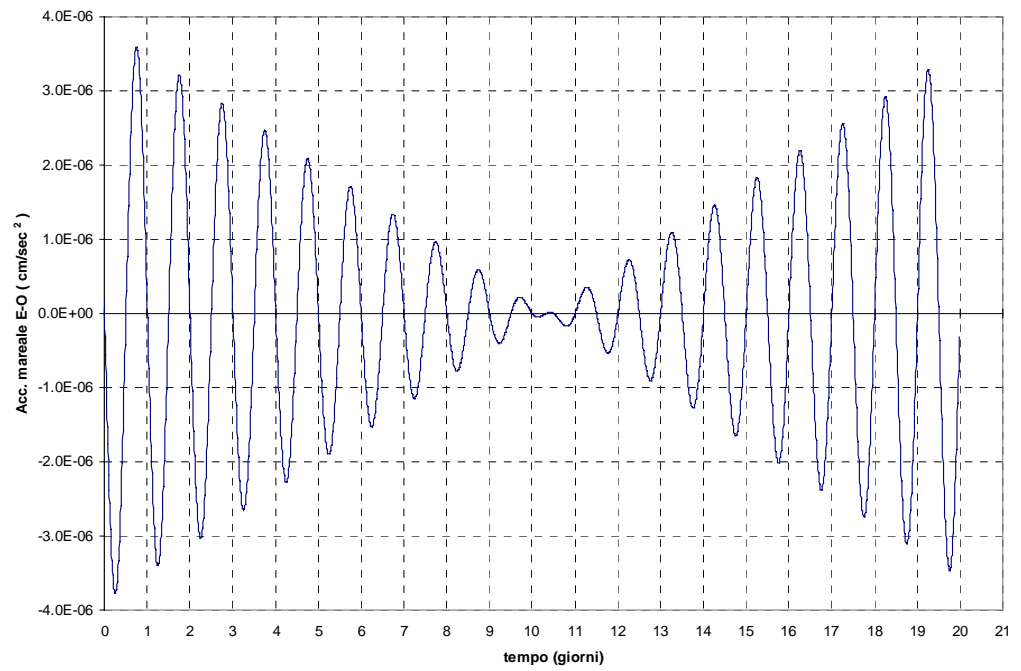


figura 4.4.4: Andamento dell'accelerazione mareale nella direzione E-O durante 20 giorni attorno all'equinozio.

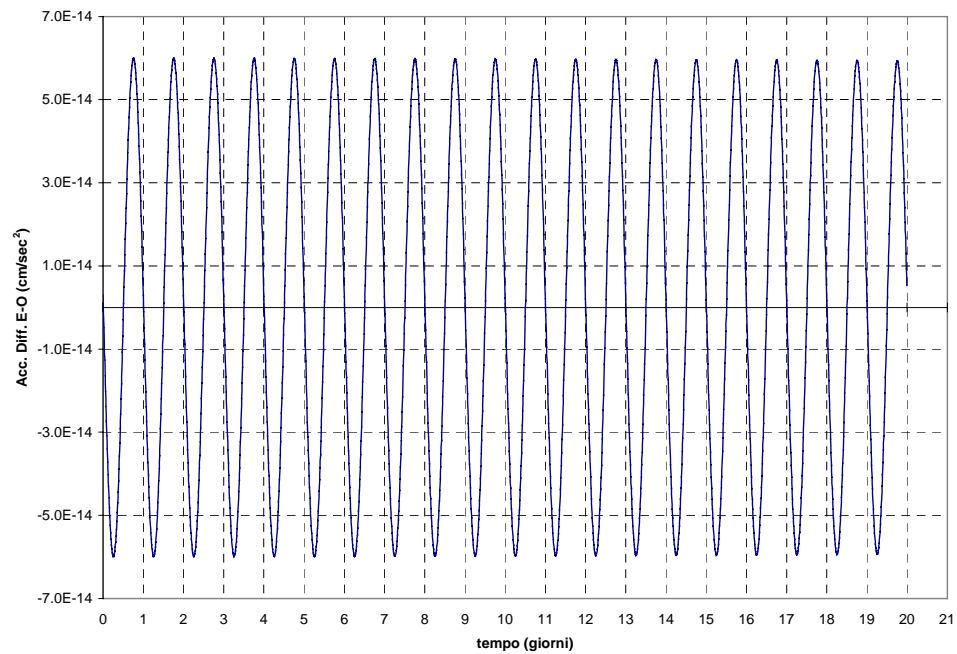


figura 4.4.5: Accelerazione differenziale con sorgente il Sole della violazione del PE durante 20 giorni attorno all'equinozio.

I grafici mostrati fino a questo momento riportano le accelerazioni mareali e di violazione prodotte dall'azione di un solo corpo perturbante. Tuttavia, poiché il programma del *Bureau des longitudes* che è stato utilizzato per raccogliere i dati permette di conoscere le ascensioni rette e le declinazioni di più corpi celesti contemporaneamente, è stata analizzata anche la situazione in cui ci siano il Sole e la Luna come masse gravitazionali che provocano effetti di marea nel laboratorio e quindi sull'apparato GGG. Questa infatti è la situazione più vicina a quella reale e, se si intende utilizzare un segnale calcolato per via teorica come riferimento nel segnale ottenuto dalle osservazioni, è questa che va analizzata. L'accelerazione mareale provocata dalla Luna è doppia rispetto a quella solare, come abbiamo già visto nel capitolo 3, e l'andamento di questa accelerazione è riportato nella figura 4.4.6.

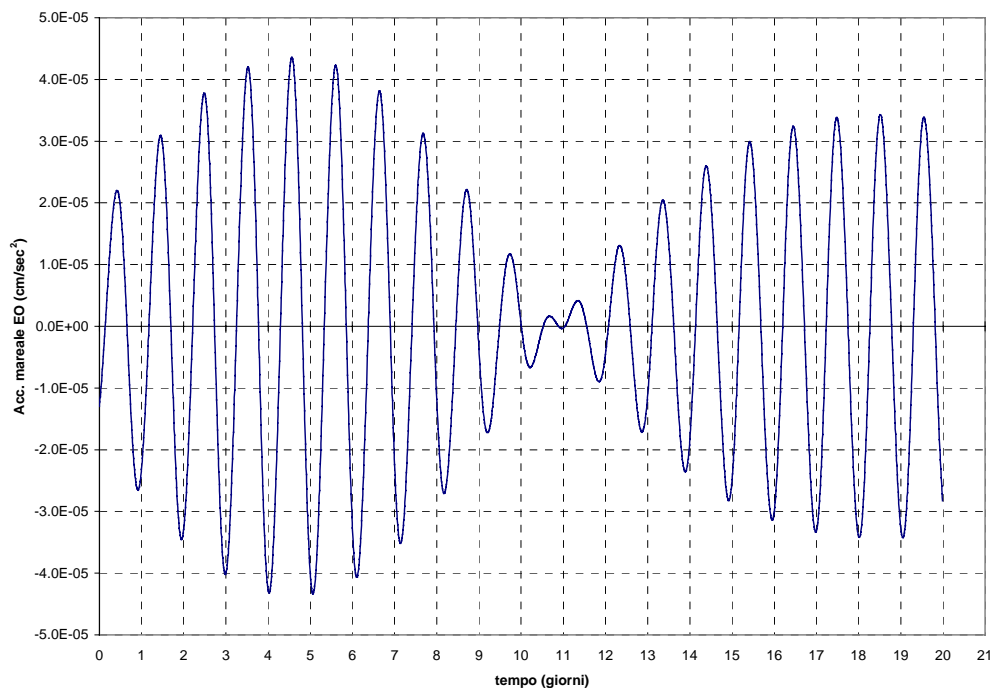
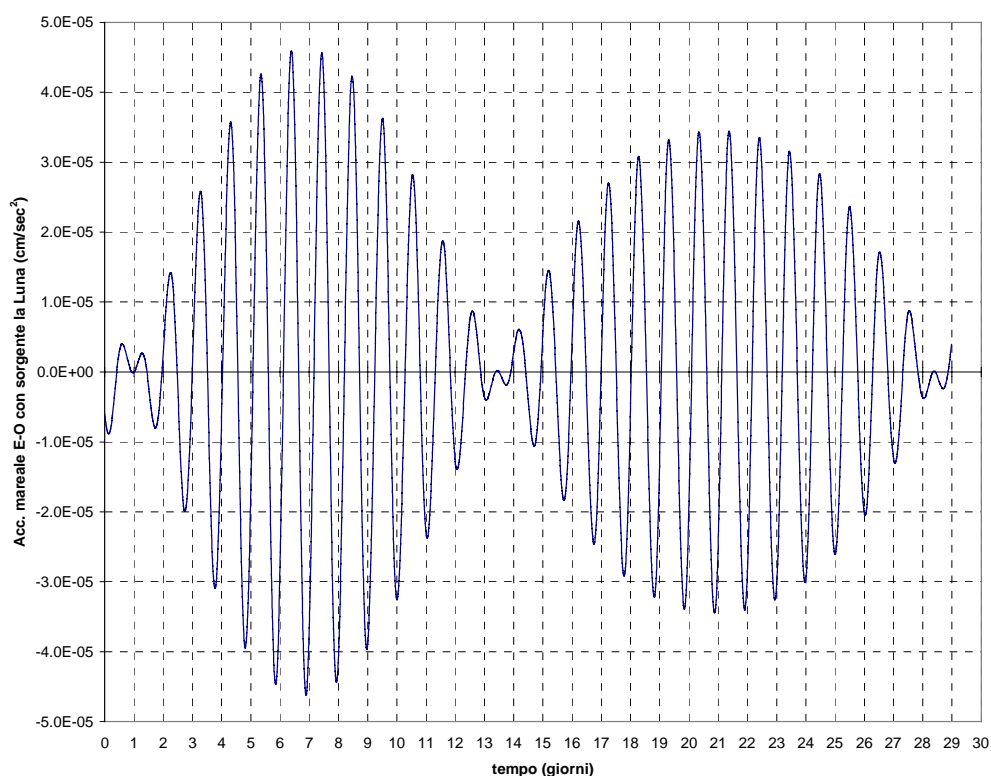


figura 4.4.6: Accelerazione mareale in direzione E-O dovuta all'azione della Luna per misurazioni svolte per 20 giorni attorno all'equinozio. Si noti che l'ampiezza del segnale è molto maggiore rispetto a quella rilevata, nello stesso periodo, con sorgente il Sole. Il segnale, inoltre, varia molto più velocemente di quello solare a causa della grande diversità dei periodi di rivoluzione apparente dei due corpi rispetto alla Terra.

Quanto emerge dall'analisi di questi ultimi grafici proposti è che, se vogliamo riprodurre il segnale che ci aspettiamo di osservare in laboratorio, diviene indispensabile considerare l'azione della luna nel calcolo dell'accelerazione mareale.

Infine, si noti che i dati riportati nella [figura 4.4.6](#) si riferiscono ai dati relativi a un periodo attorno all'equinozio.

Più interessanti di questi dati, allora, sono quelli relativi a un periodo qualunque dell'anno in cui non si hanno particolari situazioni di simmetria. Ad esempio, può essere utile analizzare il grafico relativo all'accelerazione mareale lunare nel mese di Maggio ([figura 4.4.7](#)) e confrontarlo, infine, con il grafico ottenuto mettendo insieme gli effetti del Sole e della Luna ([figura 4.4.8](#)). L'ultimo grafico ([figura 4.4.9](#)) rappresenta, invece, quale segnale ci aspettiamo, per misurazioni svolte nel mese di Maggio, nel caso che ci sia una violazione del principio di equivalenza. Le sorgenti gravitazionali, anche in questo caso, sono il Sole e la Luna.



*figura 4.4.7: Accelerazione mareale in direzione E-O con sorgente la Luna. I dati raccolti si riferiscono al mese di Maggio. Si noti che l'andamento generale della marea è simile a quello mostrato per i dati raccolti attorno all'equinozio.*

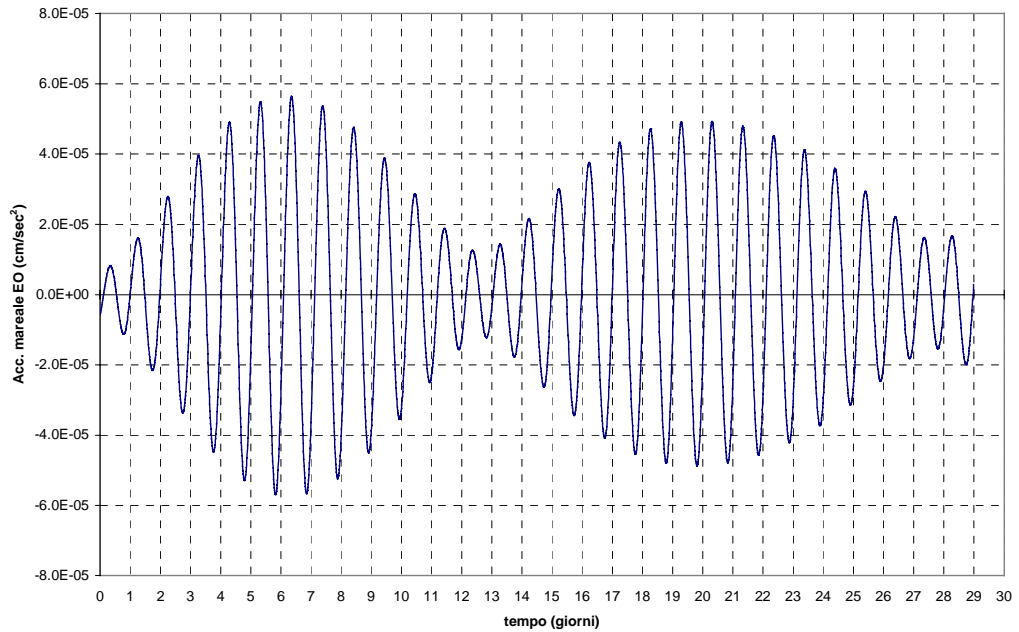
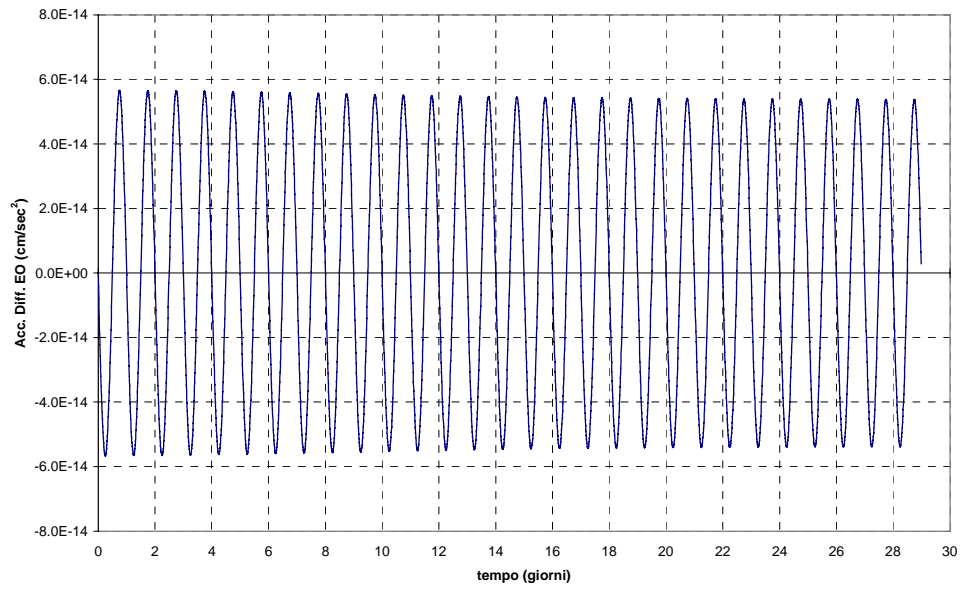


figura 4.4.8: Accelerazione della marea lunisolare prevista nel mese di Maggio.

Poiché il contributo della Luna è maggiore, nella marea, di quello del Sole, l'aspetto del grafico nella *figura 4.4.8* è più simile a quello della *figura 4.4.7* che non a quello della *4.4.1*.

Si noti anche che, quando i due contributi si sommano, il segnale mareale non diventa mai piccolissimo, come accadeva nel caso del Sole come unica sorgente, e che si ha una piccola differenza di fase. Questo ci suggerisce come sarebbe stato difficile analizzare i dati sperimentali raccolti durante l'esperimento senza avere un buon modello dell'andamento della marea nel tempo. Di seguito, si mostra quale accelerazione pensiamo di poter rivelare con GGG, se si verifica una violazione del principio di equivalenza.



*figura 4.4.9: Accelerazione differenziale attesa per una eventuale violazione del principio di equivalenza per misurazioni svolte nel mese di Maggio.*

Sommario del Capitolo 4

*Applicazioni al prototipo GGG: problemi e soluzioni relative agli effetti mareali*

4.1	Analisi armonica del potenziale mareale .....	67
4.2	Il termine tesserale .....	72
4.2.1	Le principali onde mareali con periodo 24 ore .....	74
4.3	Gli altri termini del potenziale mareale.....	76
4.4	Interpretazione dei dati in GGG.....	77