Compito di Istituzioni di Fisica Matematica
19 Settembre 2017
(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Esercizio 1. Si descrivano le traiettorie del moto geodetico di un punto materiale sulla superficie di equazioni

$$\begin{cases} x = r(z)\cos\phi \\ y = r(z)\sin\phi \\ z = z \end{cases} \qquad\qquad r(z) = \exp\Big[-\Big(\frac{z^4}{4} - \frac{z^2}{2}\Big)\Big],$$

dove $z \in \mathbb{R}, \phi \in S^1$.

Esercizio 2. Calcolare le variabili azione-angolo $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$ del moto centrale piano con funzione di Hamilton

$$H(p_\rho, p_\theta, \rho, \theta) = \frac{p_\rho^2}{2} + \frac{p_\theta^2}{2\rho^2} + V(\rho),$$

dove $V : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^∞.
Suggerimento: usare l'equazione di Hamilton-Jacobi ed una trasformazione canonica a variabili intermedie (h, c, τ, ψ), dove h, τ sono variabili energia-tempo, c è il valore del momento angolare p_θ, e ψ è un'opportuna variabile angolo coniugata a c.

Esercizio 3. Si consideri la hamiltoniana

$$H_\epsilon(\boldsymbol{I}, \boldsymbol{\varphi}) = \frac{1}{2}|\boldsymbol{I}|^2 + \epsilon f(\boldsymbol{\varphi}), \qquad \boldsymbol{I} = (I_1, I_2, I_3) \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{T}^3,$$

con

$$f(\boldsymbol{\varphi}) = \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3) - \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

i) Si trovi la forma normale risonante $\tilde{H}_\epsilon$ di H_ϵ relativa alla risonanza singola definita da $k = (1, -1, 0)$.

ii) Si consideri la hamiltoniana $\mathcal{H}_\epsilon$ ottenuta da $\tilde{H}_\epsilon$ trascurando i termini $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ e si dimostri che essa definisce un sistema hamiltoniano integrabile trovando tre integrali primi in involuzione e genericamente indipendenti.

iii) Descrivere l'andamento delle variabili di azione $I_j,\ j = 1, 2, 3$ al primo ordine in ϵ e mostrare che, all'interno della risonanza considerata, vale il principio della media.