

Compito di Meccanica Razionale

19 luglio 2019

(usare fogli diversi per esercizi diversi)

Primo Esercizio

Un punto materiale di massa unitaria si muove in un campo di forze centrali

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho)\mathbf{e}_\rho, \quad f(\rho) = 6\rho^5 - 2\alpha\rho$$

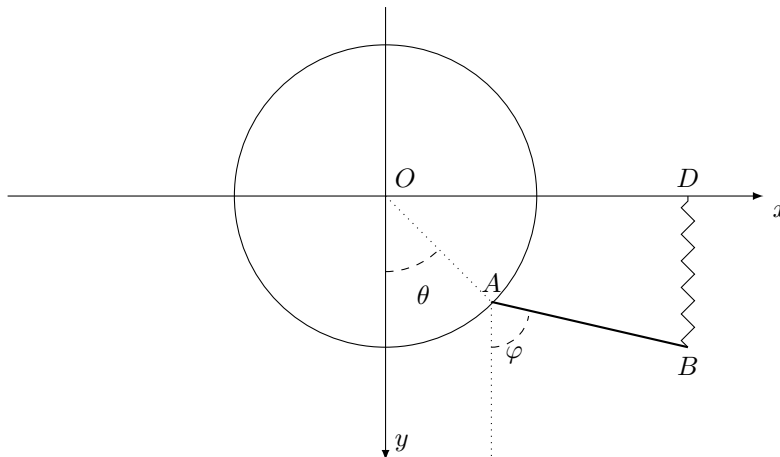
dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e ρ è la distanza del punto dal centro di forza.

- Studiare qualitativamente il moto del punto materiale, analizzando i casi che si presentano al variare del parametro reale α e della posizione e velocità iniziali $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ del punto.
- Discutere l'esistenza di orbite circolari e in caso affermativo trovare il periodo del moto.

Secondo Esercizio

In un piano verticale un'asta omogenea di massa m e lunghezza l ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito lungo una guida circolare di raggio R . All'altro estremo dell'asta è collegata una molla di costante elastica $k > 0$ che si mantiene sempre verticale. Sul sistema agisce la forza di gravità, di accelerazione g . Siano θ, φ gli angoli che OA e l'asta formano con la verticale.

- Scrivere la Lagrangiana del sistema.
- Calcolare le configurazioni di equilibrio.
- Posto $J = \frac{mg}{k(R+l)}$, discutere la stabilità della configurazione $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ al variare di $J \neq 1, 2$.
- Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni relativa alla configurazione $(\theta, \varphi) = (0, 0)$ nel caso $J = 4$.



Terzo Esercizio

Si consideri un piano inclinato di un angolo α e si fissi su di esso un sistema di riferimento come illustrato in figura. Un disco omogeneo di massa M e raggio R può rotolare senza strisciare su tale piano. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza l è appesa ad un punto Q del bordo del disco. Al baricentro B del disco è attaccato un estremo di una molla di costante elastica k che resta sempre parallela al piano inclinato. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Sia D il punto di contatto tra il disco e il piano. Si scelgano come coordinate lagrangiane l'ascissa s di D e l'angolo θ che l'asta forma con la direzione ortogonale al piano.

Supponendo che per $s = 0$ i punti Q e D coincidano e la molla si trovi a riposo, determinare le equazioni del moto mediante le equazioni cardinali.

