

Secondo compito di Meccanica Razionale 11 Luglio 2022

Esercizio 1. Si consideri il moto di un punto materiale di massa m nel campo di forze centrali

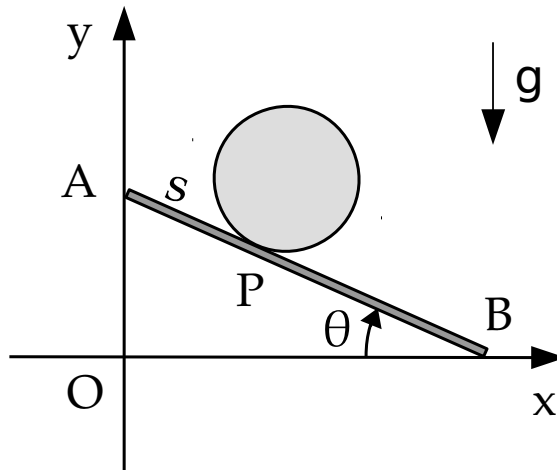
$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\frac{k}{\rho^2}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|, \quad k > 0.$$

1. Assumendo che il momento angolare sia diverso da zero, si disegni il ritratto di fase nel piano con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$.
2. Si trovino i valori del momento angolare per i quali si ha un'orbita circolare $\mathbf{x}_c(t)$ con energia totale nulla.
3. Calcolare il periodo dell'orbita circolare del punto precedente.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Un'asta omogenea di massa M e lunghezza ℓ ha l'estremo A vincolato a scorrere sull'asse Oy e l'estremo B vincolato a scorrere sull'asse Ox , ed entrambi i vincoli sono lisci. Inoltre, un disco omogeneo di massa m e raggio r rotola senza strisciare sull'asta. Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g e rivolta verso il basso.

Si usino come coordinate la lunghezza s misurata dall'estremo A dell'asta al punto P , con P punto di contatto tra asta e disco, e l'angolo θ che l'asta forma con l'asse Ox (si veda la figura).

- i) Calcolare le velocità angolari dell'asta e del disco.
- ii) Trovare le reazioni vincolari in A e B in funzione delle coordinate s e θ , e delle loro derivate prime e seconde.
- iii) Scrivere le equazioni del moto del sistema tramite le equazioni cardinali.



Esercizio 3. Un punto materiale P di massa m è vincolato a muoversi su un toro liscio di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = (R + r \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (R + r \cos \varphi) \sin \theta \\ z = r \sin \varphi \end{cases}$$

con $\varphi, \theta \in S^1$ e $R > r > 0$ costanti. Sul punto agisce una forza elastica di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla, diretta verso il punto $O = (0, 0, 0)$.

- i) Scrivere la lagrangiana del sistema e ridurre il sistema ad un solo grado di libertà con il metodo di Routh.
- ii) Fissati $R = \sqrt{3}r$ e $c^2 = \frac{mkR^4}{8}$, dove c è il momento coniugato alla variabile ciclica, tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto.