

Compito di Meccanica Razionale 14 Settembre 2022

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|$$

$$f(\rho) = \rho - \frac{\alpha^2}{\rho^3}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

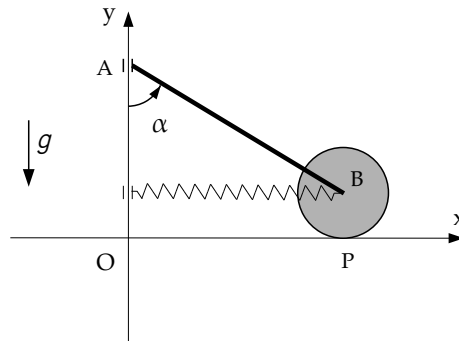
- i) Tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di α e della componente c del momento angolare ortogonale al piano del moto, supponendo $c \neq 0$.
- ii) Nel caso $|\alpha| < |c|$, determinare l'estremo inferiore ρ_{min} della distanza di P dal centro di forze in funzione di α , c e dell'energia totale E .
- iii) Sia $\alpha = \sqrt{5}$ e sul piano del moto si prendano

$$\mathbf{x}(0) = (1, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (0, a), \quad a \in \mathbb{R};$$

trovare tutti i valori di a affinché l'orbita con condizioni iniziali $(\mathbf{x}(0), \dot{\mathbf{x}}(0))$ sia circolare.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il sistema formato da un'asta \mathcal{A} omogenea di massa m e lunghezza ℓ , e da un disco \mathcal{D} omogeneo di massa M e raggio R . Il disco rotola senza strisciare sull'asse Ox , mentre l'asta ha l'estremo A vincolato a muoversi sull'asse Ox e l'estremo B incernierato al baricentro del disco \mathcal{D} . Sul sistema agisce la forza di gravità di accelerazione g , diretta verso il basso. Inoltre, una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla collega B all'asse Oy , rimanendo sempre orizzontale. Infine, supponiamo che il vincolo in A sia liscio.

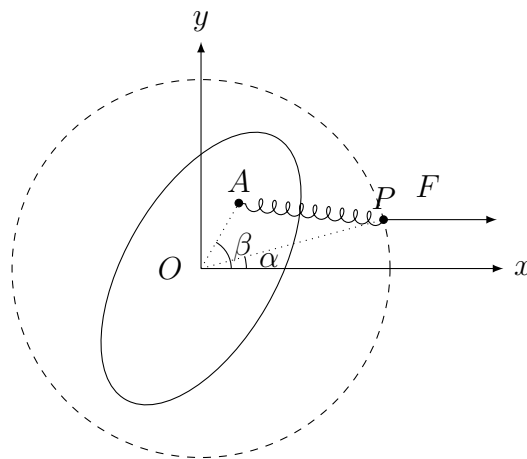
Si usi come coordinata l'angolo α che AB forma con la direzione verticale (si veda la figura).



- i) Calcolare le velocità angolari di \mathcal{A} e \mathcal{D} .
- ii) Calcolare le reazioni vincolari in A e P in funzione di α e delle sue derivate temporali.
- iii) Calcolare le equazioni di moto del sistema mediante le equazioni cardinali.

Terzo Esercizio

In un piano orizzontale si introduca un sistema di riferimento Oxy . Si consideri il sistema meccanico formato da una lamina ellittica omogenea di massa m , semiasse maggiore a ed eccentricità e . Il centro della lamina è incernierata nell'origine O in modo che essa possa ruotare senza attrito. Fa parte del sistema anche un punto materiale P di massa M , che può muoversi senza attrito su una guida circolare di raggio R ($R > r$) centrata in O . Sul punto P agisce una forza costante $F\hat{e}_1$, $F > 0$, dove \hat{e}_1 è il versore dell'asse Ox . Inoltre uno dei due fuochi della lamina ellittica, denotato con A , è collegato al punto P da una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla (vedi figura).



Usando come coordinate lagrangiane gli angoli α e β , che OP e OA formano rispettivamente con l'asse Ox ,

1. calcolare le configurazioni di equilibrio del sistema e determinarne la stabilità;
2. calcolare il momento di inerzia I_3 della lamina ellittica rispetto all'asse passante per O e ortogonale al piano della lamina;
3. calcolare le frequenze proprie delle piccole oscillazioni attorno all'unica configurazione di equilibrio stabile.